Spé
Mathématiques

2011-2012

Table des matières

Chapitre 1

Séries réelles et complexes

1.1 Suites de Cauchy

Définition : On dit qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} = u \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ (où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) est de Cauchy si :
$\forall \varepsilon > 0$, $\exists\, n_0 \in \mathbb{N}$ tel que si $n \geqslant n_0$ et $m \geqslant n_0$, alors $|u_n - u_m| \leqslant \varepsilon$.

Proposition 1 : Toute suite convergente est de Cauchy.

Proposition 2 : Toute suite de Cauchy est bornée.

Théorème : Toute suite réelle ou complexe de Cauchy est nécessairement convergente.

Un théorème du point fixe : Soit $f : I \to I$ contractante (fonction k-Lipschitzienne avec $k < 1$) où I est un fermé de $\mathbb{R}$.
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite définie par récurrence : $u_0 \in I$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.
Alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et sa limite est l'unique point fixe de f.

Définition : On appelle fermé tout ensemble F pour lequel si une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de F converge, sa limite appartient à F. (Voir autre définition chapitre 5).

1.2 Séries

Définitions :

- On appelle série (numérique) de terme général u_n où $(u_n)_n$ est une suite de scalaires ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$), la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $\forall n \in \mathbb{N}$, $S_n = \sum_{i=0}^{n} u_i$. On la note $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ ou $\sum u_n$.
- On dit que la série $\sum u_n$ converge (respectivement diverge) si la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge (respect. diverge).
- S_n est appelée la somme partielle d'ordre n (c'est une somme « finie »).
- Si la série $\sum u_n$ converge (i.e. la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge), on appelle somme de la série $\sum u_n$ le nombre noté $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ et égale à $S = \lim_{n\to+\infty} S_n$.
- u_n s'appelle le terme général.

Théorème : Si la série $\sum u_n$ converge, alors nécessairement le terme général de la série u_n tend vers 0.
Par la contraposée, si le terme général d'une série ne tend pas vers 0, la série diverge (on parle souvent de divergence grossière).

Définition : On appelle série « géométrique »toute série du type $\sum_{n\in\mathbb{N}} z^n$, $z \in \mathbb{C}$.

Propriété : La série « géométrique »$\sum_{n\in\mathbb{N}} z^n$ converge si et seulement si $|z| < 1$, et a alors pour somme $\dfrac{1}{1-z}$.

Propriété : L'ensemble des séries convergentes muni des lois $+$ et $\cdot$ a une structure d'espace vectoriel.

1.3 Séries à termes réels positifs

Lemme fondamental : Soit $\sum u_n$ une série à termes réels positifs (i.e. $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \in \mathbb{R}^+$), soit $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$ (somme partielle d'ordre n).

$$\left[\sum u_n \text{ converge }\right] \Leftrightarrow [(S_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est majorée}] \text{ et alors } \sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} S_n = \underset{n\in\mathbb{N}}{Sup}(S_n).$$

Théorème 1 : Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries à termes réels positifs avec $\forall n \in \mathbb{N}$: $0 \leqslant u_n \leqslant v_n$.

- Si $\sum_{n\in\mathbb{N}} v_n$ converge, alors $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ converge et alors $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} v_n$.
- Si $\sum u_n$ diverge, alors $\sum v_n$ diverge.

Rappels sur les relations o, O et $\sim$: Soient $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ deux suites.

- $u_n = O\ (v_n) \Leftrightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N}, \exists A \in \mathbb{R}^+$ tel que si $n \geqslant n_0$, alors $|u_n| \leqslant A|v_n|$;
- $u_n = o\ (v_n) \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}$ tel que si $n \geqslant n_0$, alors $|u_n| \leqslant \varepsilon |v_n|$;
- $u_n \sim v_n \Leftrightarrow u_n = v_n + o\ (v_n)$.

Théorème 2 : Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries à termes réels positifs.

- si $u_n = O(v_n)$ ou si $u_n = o(v_n)$
  - si $\sum v_n$ converge, alors $\sum u_n$ converge ;
  - si $\sum u_n$ diverge, alors $\sum v_n$ diverge ;
- si $u_n \sim v_n$, les deux séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature.

Théorème : Séries de Riemann : $\sum_{n\in\mathbb{N}^\star} \dfrac{1}{n^\alpha}$ converge $\Leftrightarrow \alpha > 1$

Lemme : Soit $\sum u_n$ une série à termes strictement positifs.
Si pour $n \geqslant n_0$ ($n_0 \in \mathbb{N}$),

- $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant k$ avec $k < 1$, alors la série $\sum u_n$ converge ;
- $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \geqslant 1$, alors la série $\sum u_n$ diverge.

Règle de D'Alembert : Soit $\sum u_n$ une série à termes strictement positifs où la suite $\left(\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right)_n$ admet une limite $l \in \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$. Alors :

- si $l < 1$, la série $\sum u_n$ converge ;
- si $l > 1$, la série $\sum u_n$ diverge.

Développement décimal d'un réel : Soit $x \in \mathbb{R}^+$.
On pose $(u_n)_n = 10^{-n}E(10^n x)$. Notons $p_{n+1} = 10^{n+1}(u_{n+1} - u_n \in [\![0, 9]\!]$.
On a $u_n = E(x) + \dfrac{p_1}{10} + \dfrac{p_2}{100} + \ldots + \dfrac{p_n}{10^n} = E(x), p_1p_2p_3\ldots p_n$.

Développement décimal illimité de x : $x = E(x), p_1p_2\ldots p_n\ldots = E(x) + \displaystyle\sum_{i=1}^{+\infty} \frac{p_i}{10^i}$.

- Cas particulier des décimaux : $x \in \mathbb{D} \Leftrightarrow \exists a \in \mathbb{Z}, \exists n \in \mathbb{N}$ tels que $x = \dfrac{a}{10^n}$.
- Cas particulier des rationnels : ce sont les réels admettant un développement décimal illimité périodique $x \in \mathbb{Q} \Leftrightarrow \exists (a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^\star$ tel que $PGCD(a, b) = 1$ et $x = \dfrac{a}{b}$.

Comparaison des sommes partielles de deux séries dont l'une diverge : Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries à termes généraux positifs. On suppose que $\sum v_n$ diverge.

- Si $u_n = O(v_n)$, $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} u_i = O\left(\sum_{i=0}^{n} v_i\right)$.
- Si $u_n = o(v_n)$, $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} u_i = o\left(\sum_{i=0}^{n} v_i\right)$.

Comparaison des restes de deux séries convergentes : Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries à termes généraux positifs. On suppose que $\sum v_n$ converge.

- Si $u_n = O(v_n)$, alors $\sum u_n$ converge et $\displaystyle\sum_{i=n+1}^{+\infty} u_i = O\left(\sum_{i=n+1}^{+\infty} v_i\right)$.
- Si $u_n = o(v_n)$, alors $\sum u_n$ converge et $\displaystyle\sum_{i=n+1}^{+\infty} u_i = o\left(\sum_{i=n+1}^{+\infty} v_i\right)$.

Comparaison des sommes partielles de deux séries à termes généraux équivalents : Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries à termes généraux positifs. On suppose que $u_n \sim v_n$ converge.

- Si $\sum u_n$ diverge, alors $\sum v_n$ diverge et $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} u_i \sim \sum_{i=0}^{n} v_i$.
- Si $\sum u_n$ converge, alors $\sum v_n$ converge et $\displaystyle\sum_{i=n+1}^{+\infty} u_i \sim \sum_{i=n+1}^{+\infty} v_i$.

Comparaison avec une intégrale :

- **Théorème 1** : Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ continue et décroissante. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} = (f(n))_{n\in\mathbb{N}}$. La série $\sum u_n$ converge si et seulement si la suite $\left(\int_0^n f(t)dt\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.
- **Théorème 2** : Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ continue et décroissante. Soit, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\begin{cases} v_n = \displaystyle\int_n^{n+1} f(t)dt - f(n+1) \\ w_n = f(n) - \displaystyle\int_n^{n+1} f(t)dt \end{cases}$, alors les séries $\sum v_n$ et $\sum w_n$ convergent.

1.4 Séries absolument convergentes

Définition : Soit $\sum u_n$ une série numérique (complexe ou réelle). On dit que la série $\sum u_n$ est absolument convergente si la série $\sum |u_n|$ converge.

Proposition : critère de Cauchy pour les séries : Soit $\sum u_n$ une série numérique (i.e. $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \in \mathbb{K}$ où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).

$$\left[\sum u_n \text{ converge }\right] \text{ si et seulement si } \left[\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ tel que si } m \geqslant n \geqslant n_0, \text{ alors } \left|\sum_{i=n}^{m} u_i\right| \leqslant \varepsilon\right]$$

Théorème : Toute série absolument convergente est convergente.

Formule de Stirling : $n! \sim \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}$.

1.5 Séries alternées

Définition : On appelle série alternée toute série du type $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ où $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = (-1)^n v_n$ où $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite à termes positifs.

Théorème : Critère spécial des séries alternées : Soit $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n = \sum_{n\in\mathbb{N}} (-1)^n v_n$ une série alternée. Si la suite $(v_n)_n$ est décroissante et converge vers 0 alors :

- la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ converge. Soit S sa somme ;
- $\forall n \in \mathbb{N}$, S appartient à l'intervalle fermé dont les bornes sont S_n et S_{n+1} ;
- $\forall n \in \mathbb{N}$, le reste $R_n = S - S_n$ d'ordre n de la série a pour signe celui de u_{n+1} et vérifie $|R_n| \leqslant |u_{n+1}| = v_{n+1}$

1.6 Produit de Cauchy de deux séries :

Définition : Soient $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ et $\sum_{n\in\mathbb{N}} v_n$ deux séries. On appelle produit de Cauchy de deux séries $\sum_{n\in\mathbb{N}} w_n$ où $\forall n \in \mathbb{N}$, $w_n = \sum_{k=0}^{n} u_k v_{n-k}$.

Théorème : Soient $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ et $\sum_{n\in\mathbb{N}} v_n$ deux séries absolument convergentes. Soit $\sum_{n\in\mathbb{N}} w_n$ leur produit de Cauchy alors $\sum_{n\in\mathbb{N}} w_n$ est absolument convergente et a pour somme :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} w_n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right) \times \left(\sum_{n=0}^{+\infty} v_n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} u_k v_{n-k}\right)$$

1.7 Séries doubles

Définition : On appelle série double l'écriture $\sum_{(i,j)\in\mathbb{N}^2} u_{i,j}$.

Théorème : théorème de Fubini Soit la série double à termes positifs $\sum_{(i,j)\in\mathbb{N}^2} u_{i,j}$. Les quatre propositions suivantes sont équivalentes.

- Procédé en ligne :
  - $\forall j \in \mathbb{N}$, la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_{n,j}$ converge : on note S_j sa somme ;
  - $\sum_{j\in\mathbb{N}} S_j$ converge.
- Procédé en colonne :
  - $\forall i \in \mathbb{N}$, la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_{i,n}$ converge : on note S'_i sa somme ;
  - $\sum_{i\in\mathbb{N}} S'_i$ converge.
- Procédé diagonal :
  - en notant $w_n = \sum_{k=0}^{n} u_{k,n-k}$, la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} w_n$ converge.
- Procédé carré :
  - en notant $\sigma_n = \sum_{\substack{0\leqslant i\leqslant n\\ 0\leqslant j\leqslant n}} u_{i,j}$, la suite $(\sigma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

Et alors, $\sum_{j=0}^{+\infty} S_j = \sum_{i=0}^{+\infty} S'_i = \sum_{n=0}^{+\infty} w_n = \lim_{n\to+\infty} \left(\sum_{0\leqslant i,j\leqslant n} u_{i,j}\right) = \lim_{n\to+\infty} \sigma_n$.
La série double est alors dite sommable.

Définition : Soit $(u_{i,j})_{(i,j)\in\mathbb{N}^2}$ une famille double de réels ou de complexes. Elle est dite sommable si la famille $(|u_{i,j}|)_{i,j}$ est sommable.

Théorème 2 : Si la famille $(|u_{i,j}|)_{i,j}$ est sommable, c'est-à-dire vérifie l'une des propriétés du théorème de Fubini et donc par équivalence, vérifie les quatre, alors la famille $(u_{i,j})_{i,j}$, sommable par définition, vérifie elle-même ces quatres propriétés i.e.

$$\sum_{i=0}^{+\infty} \left(\sum_{j=0}^{+\infty} u_{i,j}\right) = \sum_{j=0}^{+\infty} \left(\sum_{i=0}^{+\infty} u_{i,j}\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{i=0}^{n} u_{n-i,i}\right) = \lim_{n\to+\infty} \left(\sum_{0\leqslant i,j\leqslant n} u_{i,j}\right)$$

Chapitre 2

Compléments d'algèbre

2.1 Compléments sur les groupes

Définition : Structure de groupe : Soit G un ensemble et $*$ une loi de composition interne sur G.
On dit que $(G, *)$ a une structure de groupe lorsque :
- $*$ est une lci sur G ;
- $*$ est associative ;
- $*$ admet un élément neutre $e \in G$;
- tout élément $x \in G$ doit admettre un symétrique pour $*$ dans G.

Si de plus, $*$ est commutative, on dira que $(G, *)$ est un groupe commutatif ou abélien.

Caractérisation des sous-groupes : Soit $(G, *)$ un groupen et $H \subset G$.
$(H, *)$ sous-groupe de $(G, *)$ si et seulement si :
- $1_G \in H$
- $\forall x \in H,\ x^{-1} \in H$
- $\forall x, y \in H,\ x * y \in H$.

OU
- $1_G \in H$
- $\forall x, y \in H,\ x * y^{-1} \in H$

Définition / Théorème : groupe produit : Soit $(G, *)$ et $(G', \bullet)$ deux groupes (resp. commutatifs).
En définissant dans $G \times G'$ la loi $\square$ par :

$$\forall (a, b) \in G \times G',\ \forall (c, d) \in G \times G',\ (a, b) \square (c, d) = (a * c, b \bullet d)$$

alors $(G \times G', \square)$ est un groupe produit (resp. commutatif).

Définition : sous-goupe engendré : Soit $(G, *)$ un groupe et A une partie de G. On appelle sous-groupe engendré par A, noté $Gr(A)$, le plus petit sous-groupe (au sens de l'inclusion) contenant A.

Définition : relation d'équivalence : Soit $\mathscr{R}$ une relation (binaire) définie sur un ensemble E. On dit que $\mathscr{R}$ est une relation d'équivalence si elle est :
- réflexive : $\forall a \in E,\ a \mathscr{R} a$;
- symétrique : $\forall (a, b) \in E^2$, si $a \mathscr{R} b$ alors $b \mathscr{R} a$;
- transitive : $\forall (a, b, c) \in E^3$, si $a \mathscr{R} b$ et $b \mathscr{R} c$, alors $a \mathscr{R} c$.

Définition : classes d'équivalences : Soit $\mathscr{R}$ une relation d'équivalence sur un ensemble E. Soit $x \in E$. La classe d'équivalence de x est définie par :

$$Cl(x) = \{y \in E \mid y\mathscr{R}x\}$$

Propriétés :
- $Cl(x) = Cl(y) \Leftrightarrow [x\mathscr{R}y]$
- $\forall(x,y) \in E^2$ ou bien $Cl(x) = Cl(y)$ ou bien $Cl(x) \cap Cl(y) = \varnothing$
- L'ensemble des classes d'équivalences forme une partition de E, ce qui signifie qu'on obtient un ensemble de parties de E tel que :
  - aucune n'est vide ;
  - deux disctinctes sont nécessairement disjointes ;
  - leur réunion est égale à E.

Définition : relation de congruence modulo n ($n \in \mathbb{N}$) : On définit sur $\mathbb{Z}$ la relation de congruence modulo n par : $\forall(a,b) \in \mathbb{Z}^2 : a \equiv b[n] \Leftrightarrow n|(a-b) \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}/a = b + kn$.

Définition : L'ensemble des classes d'équivalence s'appelle l'ensemble quotient de E par $\mathscr{R}$ et est noté $E/\mathscr{R}$.

Proposition préliminaire : Soit $a, b \in \mathbb{Z}$, soit $n \in \mathbb{N}$. Si $a \equiv a'[n]$ et $b \equiv b'[n]$, alors $a + b \equiv a' + b'[n]$.

Définition : Soient $\overline{a}, \overline{b} \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. $\overline{a} \oplus \overline{b} = \overline{a+b}$.

Théorème : $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$ est un groupe commutatif.

Propriétés :
- $\overline{1}$ est toujours générateur de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.
- $\overline{k}$ est toujours générateur de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \Leftrightarrow \overline{1} \in Gr\left(\overline{k}\right) \Leftrightarrow \exists u \in \mathbb{Z}$ tel que $\overline{1} = u\overline{k}$.

Théorème : Soient $n \in \mathbb{N}$ et $k \in \mathbb{Z}$. $\left[\overline{k}\text{ est générateur de }\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}\right] \Leftrightarrow [k \wedge n = 1]$.

Lemme fondamental : Les sous-groupes de $\mathbb{Z}$ s'écrivent de la forme $n\mathbb{Z}$ où $n \in \mathbb{N}$.

Théorème : Soit $(G, \cdot)$ un groupe de neutre e. Soit $a \in G$. Soit $Gr(a)$ le groupe engendré par a (des puissances de a). Alors :
- ou bien $Gr(a) \simeq \mathbb{Z}$: on dit que a est d'ordre infini.
  - $Card\,(Gr\,(a)) = \infty$;
  - $a^n = e \Leftrightarrow n = 0$;
  - $Gr(a) = \left\{\ldots, a^{-2}, a^{-1}, e, a^1, a^2, \ldots\right\}$.
- ou bien $Gr(a) \simeq \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ avec $n \in \mathbb{N}^\star$: on dit que a est d'ordre n.
  - $Card\,(Gr\,(a)) = n$;
  - $n = Min\left(\left\{k \in \mathbb{N}^\star / a^k = 0\right\}\right)$;
  - $Gr(a) = \left\{e, a^1, a^2, \ldots, a^{n-1}\right\}$.

Groupes monogène, cyclique : Un groupe G est dit :
- monogène s'il existe $a \in G$ tel que $G = Gr(a)$;
- cyclique s'il est monogène et fini.

2.2 Compléments sur les anneaux

Définition : anneau : Soit A un ensemble et $\oplus$ et $*$ deux lois de composition interne sur A. On dit que $(A, \oplus, *)$ a une structure d'anneau lorsque :

- $(A, \oplus)$ est un groupe commutatif ;
- $*$ est associative ;
- $*$ admet un élément neutre ;
- $*$ est distributive par rapport à $\oplus$: $\forall x, y, z \in A,\ x * (y \oplus z) = (x * y) \oplus (x * z)$ et $(y \oplus z) * x = (y * x) \oplus (z * x)$.

Si de plus $*$ est commutative, on dit que $(A, \oplus, *)$ est un anneau commutatif.

Proposition : caractérisation des sous-anneaux : Soit $(A, +, \cdot)$ un anneau et $A' \subset A$. $(A', +, \cdot)$ sous-anneau de $(A, +, \cdot)$ si et seulement si :

- $1_A \in A'$;
- $\forall a, b \in A'$,
  1. $a + (-b) \in A'$;
  2. $a \cdot b \in A'$.

Morphisme d'anneau : Soit $(A, +, \cdot)$ et $(A', \oplus, \otimes)$ deux anneaux. Soit $f : A \to A'$ une application. On dit que f est un morphisme de l'anneau $(A, +, \cdot)$ dans l'anneau $(A', \oplus, \otimes)$ lorsque :

- $f(1_A) = 1_{A'}$;
- $\forall a, b \in A$,
  1. $f(a + b) = f(a) \oplus f(b)$;
  2. $f(a \cdot b) = f(a) \otimes f(b)$.

Théorème : Soit $(A, +, \times)$ un anneau.
Soit $A^\star$ l'ensemble des éléments inversibles i.e. « x inversible »$\Leftrightarrow \exists x' \in A$ tel que $x \times x' = 1_A = x' \times x$, alors $(A^\star, \times)$ est un groupe appelé groupe des inversibles.

Définition : idéal d'un anneau commutatif : Soit $(A, +, \times)$ un anneau commutatif.
Soit $\mathcal{I}$ une partie de A. On dit que $\mathcal{I}$ est idéal de A si :

- $(\mathcal{I}, +)$ est un sous-groupe de $(A, +)$;
- « sur-stabilité » : $\forall a \in A,\ \forall x \in I,\ a \times x \in I$.

Propriété : $[\mathcal{I} = A] \Leftrightarrow [1_A \in \mathcal{I}]$.

Définition : notion de divisibilité : Soit $(A, +, \times)$ un anneau commutatif. Soient $a, b \in A$. On dit que b divise a ou que a est un multiple de b que l'on écrit $b|a$ lorsque : $\exists k \in A$ tel que $a = b \times k$ ou encore $a \in bA$.

Propriété : Soient a et b deux éléments d'un anneau A. $b|a \Leftrightarrow aA \subset bA$.

Propriété : noyau d'un morphisme d'anneau : Soit Φ un morphisme d'anneau de A vers A'. Soit $Ker\ \Phi = \{x \in A\ /\ \Phi(x) = 0_{A'}\}$. Alors $Ker\ \Phi$ est un idéal de l'anneau A.

Proposition : intersection et somme de deux idéaux : Soient $\mathcal{I}$ et $\mathcal{J}$ deux idéaux d'un anneau A. Alors :

- $\mathcal{I} \cap \mathcal{J}$ est un idéal de A. C'est le plus grand idéal (au sens de l'inclusion) inclus dans $\mathcal{I}$ et dans $\mathcal{J}$.
- $\mathcal{I} + \mathcal{J} = \{a + b \ / \ a \in \mathcal{I}, b \in \mathcal{J}\}$ est un idéal de A, c'est le plus petit idéal (au sens de l'inclusion) contenant à la fois $\mathcal{I}$ et $\mathcal{J}$ et doonc $\mathcal{I} \cup \mathcal{J}$.

Application 1 : arithmétique dans $\mathbb{Z}$:

PPCM : $m = PPCM(a, b) = a \vee b$ si et seulement si $\left| \begin{array}{l} m \in \mathbb{N} \\ m\mathbb{Z} = a\mathbb{Z} \cap b\mathbb{Z} \end{array} \right.$

PGCD : $d = PGCD(a, b) = a \wedge b$ si et seulement si $\left| \begin{array}{l} d \in \mathbb{N} \\ d\mathbb{Z} = a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z} \end{array} \right.$

Application 2 : arithmétique dans $\mathbb{K}[X]$:

Théorème de base : Les seuls idéaux de $\mathbb{K}[X]$ s'écrivent, avec $P \in \mathbb{K}[X]$:

$$P \cdot \mathbb{K}[X] = \{P \times A \ / \ A \in \mathbb{K}[X]\} = (P)$$

PPCM :

- si $A = 0$ ou $B = 0$, le PPCM de A et B est 0 ;
- sinon, $M = A \vee B$ est l'unique polynôme unitaire tel que $(A) \cap (B) = (M)$.

Ceci traduit que $\forall P \in \mathbb{K}[X]$, $\left\{ \begin{array}{c} A|P \\ B|P \end{array} \right. \Leftrightarrow (A \vee B)|P$.

PGCD :

- si $A = 0$ et $B = 0$, le PGCD de A et B est 0 ;
- sinon, $D = A \wedge B$ est l'unique polynôme unitaire tel que $(A) + (B) = (D)$.

Ceci traduit que $\forall \Delta \in \mathbb{K}[X]$, $\left\{ \begin{array}{c} \Delta|A \\ \Delta|B \end{array} \right. \Leftrightarrow \Delta|(A \vee B)$.

Compatibilité de la loi $\times$ avec la relation de congruence :

Propriété : Soit $n \in \mathbb{N}$, $\forall (a, b, c, d) \in \mathbb{Z}^4$. Si $a \equiv b[n]$ et $c \equiv d[n]$, alors $a \times c \equiv b \times d[n]$.

Corolaire : Soit $n \in \mathbb{N}$. Soient $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$ et $k \in \mathbb{Z}$. Si $a \equiv b[n]$, alors $a^k \equiv b^k[n]$.

Conséquence : On n'a donc aucun problème à définir dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ $\overline{a} \otimes \overline{b} = \overline{a \times b}$.

Autre propriété intéressante : $\left[\begin{array}{l} a \equiv b[m] \\ a \equiv b[n] \\ m \wedge n = 1 \end{array} \right] \Rightarrow \left[a \equiv b\,[mn] \right]$

Théorème : éléments inversibles de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ pour $\times$:

$$\left[\overline{k} \text{ est inversible dans } \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \text{ pour } \times \ \right] \Leftrightarrow [k \wedge n = 1]$$

Théorème : l'anneau $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +, \times)$: $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +, \times)$ est un anneau commutatif.

- Il est intègre si $n \in \mathbb{P} \cup \{0\}$.
- C'est un corps si $n \in \mathbb{P}$.

Définition : la fonction indicatrice d'Euler : On appelle fonction indicatrice d'Euler la fonction $\Phi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ définie par : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\Phi(n) = Card\left((\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\star\right)$.

Théorème : théorème de factorisation : Soit Ψ un morphsime d'anneau de $\mathbb{Z}$ sur A. Soit $Ker\ \Psi = n\mathbb{Z}$ (puisque c'est un sous-groupe de $(\mathbb{Z},+)$ / un idéal de $(\mathbb{Z},+,\times)$). Soit S : $\left\{\begin{array}{l}\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}\\ k\mapsto\overline{k}\end{array}\right.$. Alors il existe un morphisme $\widetilde{\Psi}$ tel que $\widetilde{\Psi}:\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}\to A$ et $\Psi=\widetilde{\Psi}\circ S$.

Application 1 : caractéristique d'un corps :

Définition : caractéristique d'un corps : La caractéristique d'un corps K est :

- égale à 0 si $\forall m\in\mathbb{Z},\ m\cdot 1_K \Leftrightarrow m=0$;
- égale à $Min\,\{m\in\mathbb{N}^{\star}|m\cdot 1_K=0_K\}$ sinon.

C'est aussi le nombre q tel que $Ker\ \Psi = q\mathbb{Z}$ pour Ψ : $\left\{\begin{array}{l}\mathbb{Z}\to K\\ m\mapsto m\cdot 1_K\end{array}\right.$.

Propriétés :

1. Si K est un corps de caractéristique q, $\forall n\in\mathbb{Z},\ m\cdot 1_K=0_K \Leftrightarrow m\in q\mathbb{Z},\ m\in Ker\ \Psi$;
2. Si $q\neq 0$, $q\in\mathbb{P}$.

Application 2 : théorème chinois : Soient $m,n\in\mathbb{N}$ tels que $m\wedge n=1$, $(a,b)\in\mathbb{Z}^2$. Le système d'équation $\left\{\begin{array}{l}x\equiv a[m]\\ x\equiv b[n]\end{array}\right.$ où x est une inconnue entière admet au moins une solution x_0. L'ensemble des solutions est alors $\mathcal{S}=x_0+(mn)\mathbb{Z}$.

Chapitre 3

Compléments d'algèbre linéaire

3.1 Familles génératrices, libres, bases

Définition 1 : Soit $(\lambda_i)_{i\in I}$ une famille de scalaires (éléments d'un corps $\mathbb{K}$).

- On dit que c'est une famille de scalaire presque tous nuls si tous les scalaires sont nuls sauf un nombre fini d'entre eux.
- L'ensemble $I' = \{i \in I | \lambda_i \neq 0\}$ est appelé le support de la famille $(\lambda_i)_{i\in I}$.

Définition 2 : Soit $(u_i)_{i\in I}$ une famille quelconque de vecteurs d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E. On appelle combinaison linéaire de la famille de vecteurs $(u_i)_{i\in I}$ tout vecteur $u \in E$ qui s'écrit $u = \sum_{i\in I} \lambda_i u_i$ où $(\lambda_i)_{i\in I}$ est une famille de scalaires presque tous nuls.

Définition 3 : Soit $(x_i)_{i\in I}$ une famille de vecteurs d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E.

1. $(x_i)_{i\in I}$ est dite génératrice si tout vecteur de E s'écrit comme combinaison linéaire de vecteurs de la famille $(x_i)_{i\in I}$ i.e. $\forall x \in E$, $\exists (x_i)_{i\in I} \in \mathbb{K}^I$ presque tous nuls tels que $x = \sum_{i\in I} \lambda_i x_i$ ou encore $\exists (i_1, \ldots, i_n) \in I^n$ tel que $x = \sum_{j=1}^{n} \lambda_{i_j} x_{i_j}$.
2. $(x_i)_{i\in I}$ est dite libre - les x_i sont linéairement indépendants - si la seule combinaison linéaire des x_i égale au vecteur nul est celle pour laquelle tous les coefficients sont nuls i.e. $\forall (\lambda_i)_{i\in I} \in \mathbb{K}^I$ presque tous nuls, $\left[\sum_{i\in I} \lambda_i x_i = 0_E\right] \Rightarrow [\forall i \in I, \lambda_i = 0]$.
3. $(x_i)_{i\in I}$ est dite liée - les x_i sont linéairement dépendants - si elle n'est pas libre.
4. C'est une base si elle est à la fois génératrice et libre.

Propriété importante : Si $\mathcal{B}$ est une base de E, tout vecteur de E s'écrit de manière unique comme combinaison linéaire de vecteurs de $\mathcal{B}$.

Quelques rappels de la dimension fini :

- Un espace vectoriel de dimension fini est un espace vectoriel admettant une famille génératrice finie.
- Théorème fondamental : dans un espace vectoriel de dimension finie, toutes les bases ont le même nombre d'éléments, appelée la dimension de E noté $\dim_{\mathbb{K}} E = n$.
- Si G est génératrice, $Card(G) \geqslant n$.
- Si L est libre, $Card(L) \leqslant n$.
- Si $\mathcal{B}$ est libre ou génératrice, et si $Card(\mathcal{B}) = n$ alors $\mathcal{B}$ est une base.

- Si $Card(L) > n$, L est liée.
  Si $Card(L) < n$, L n'est pas génératrice donc $Vect(L) \neq E$.

- Théorème de la base incomplète : si L est libre et si $Card(L) = p < n$, il existe un $(n-p)$ vecteurs $u_{n-p}, \ldots, u_n$ tels que $L@(u_{n-p}, \ldots, u_n)$ (concaténation) sera une base de E.

Proposition : Soit $\mathcal{B} = (e_i)_{i\in I}$ une base de E. Soit $\mathcal{F} = (f_i)_{i\in I}$ une famille de vecteurs de F. Alors
- il existe une et une seule application $\varphi : E \to F$ telle que $\forall i \in I$, $\varphi(e_i) = f_i$;
- φ bijective $\Leftrightarrow (f_i)_{i\in I}$ est une base de E.

Proposition : espace vectoriel produit : Soit $(E, +, \cdot)$ et $(F, \oplus, \bullet)$ deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. On définit sur le produit $E \times F$
- une addition : $\forall (x, y), (x', y') \in (E \times F)^2$, $(x, y) \boxplus (x', y') = (x + x', y \oplus y')$;
- un produit externe : $\forall (x, y) \in E \times F, \forall \alpha \in \mathbb{K}$, $\alpha \circledast (x, y) = (\alpha \cdot x, \alpha \bullet y)$.

Alors $(E \times F, \boxplus, \circledast)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. De plus, si E et F sont de dimension finie, $\dim(E \times F) = \dim E + \dim F$.

Généralisation : Si $(E_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ est une famille de $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie, $\prod_{i=1}^{n} E_i$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie avec $\dim\left(\prod_{i=1}^{n} E_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \dim E_i$.

3.2 Structure d'algèbre

Définition 1 : Soit A un ensemble, $+$ et $\times$ deux lois de compositions internes sur A et $\cdot$ une loi de composition externe sur A. Si
1. $(A, +, \times)$ est un anneau (resp. commutatif, resp. intègre) ;
2. $(A, +, \cdot)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel ($\mathbb{K}$ étant un coprs) ;
3. $\forall \alpha \in \mathbb{K}, \forall x, y \in A$, $\alpha \cdot (x \times y) = (\alpha \cdot x) \times y = x \times (\alpha \cdot y)$

On dit que $(A, +, \times, \cdot)$ est une $\mathbb{K}$-algèbre (resp. commutative, resp. intègre).

Définition 2 : Soit $(A, +, \times, \cdot)$ une algèbre. On dit que $(A', +, \times, \cdot)$ est sous algèbre de A si A' est à la fois un sous-anneau et un sous-espace vectoriel de A. Autrement dit :
- $A' \subset A$;
- $\forall x, y \in A', \forall \alpha \in \mathbb{K}$,
  1. $x + y \in A'$;
  2. $x \times y \in A'$;
  3. $\alpha \cdot y \in A'$;
- $1_A \in A'$.

Définition 3 : Soit $\varphi : A \to B$ où A et B sont deux $\mathbb{K}$-algèbres. On dit que φ est un morphisme d'algèbre si c'est à la fois un morphisme d'anneau et une application linéaire. Autrement dit : $\forall x, y \in A, \forall \alpha \in \mathbb{K}$,
- $\varphi(x + y) = \varphi(x) + \varphi(y)$;
- $\varphi(x \times y) = \varphi(x) \times \varphi(y)$;
- $\varphi(\alpha \cdot x) = \alpha \cdot \varphi(x)$;
- $\varphi(1_A) = 1_{A'}$.

3.3 Somme et somme directe de sous-espace vectoriel

Rappels de Sup sur la somme de sous-expaces vectoriels : Si F et G sont deux sous-espace vectoriels de E,

- $F \cap G$ est un sous-espace vectoriel de E (mais non $F \cup G$ a priori) ;
- $F + G = \{x + y \ / \ (x, y) \in F \times G\}$ est un sous-espace vectoriel, le plus petit sous-espace vectoriel contenant F et G et donc $F \cup G$;
- $F + G$ est une somme directe si $F \cap G = \{0_E\}$ (attention : faux à partir de 3 sous-espaces vectoriels) ;
- $E = F \oplus G$ i.e. F et G sont supplémentaires $\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} E = F + G \\ F \cap G = \{0_E\} \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \dim E = \dim F + \dim G \\ F \cap G = \{0_E\} \end{array} \right.$

Définition 1 : somme de n sous-epsaces vectoriels : Soient $(E_i)_{i \in [\![1,n]\!]}$ une famille de n sous-espaces vectoriels de E. On appelle somme de ces sous-espaces vectoriels le sous-espace vectoriel $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} E_i = \left\{ \sum_{i=1}^{n} x_i \ / \ \forall i \in [\![1, n]\!], x_i \in E_i \right\}$.

Définition 2 : La somme $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} E_i$ des n sous-espaces vectoriels E_i est dite directe si elle vérifie l'une des deux propriétés équivalentes suivantes :

1. $\displaystyle\forall (x_1, \ldots, x_n) \in \prod_{i=1}^{n} E_i$, si $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i = 0_E$ alors $\forall i \in [\![1, n]\!], x_i = 0_E$;
2. $\displaystyle\forall x \in \sum_{i=1}^{n} E_i$, $\displaystyle\exists! (x_1, \ldots, x_n) \in \prod_{i=1}^{n} E_i$ tel que $\displaystyle x = \sum_{i=1}^{n} x_i$.

Théorème 1 : Soit $(E_i)_{i \in [\![1,n]\!]}$ une famille de n sous-espaces vectoriels.

$$\left[\text{La somme } \sum_{i=1}^{n} E_i \text{ est directe} \right] \Leftrightarrow \left[\dim \left(\sum_{i=1}^{n} E_i \right) = \sum_{i=1}^{n} (\dim E_i) \right]$$

Théorème 2 : Soient $E_1, \ldots, E_n$ n sous-espaces vectoriels de E. Si la somme $\displaystyle\bigoplus_{i=1}^{n} E_i$ est directe,

$$\left[E = \bigoplus_{i=1}^{n} E_i \right] \Leftrightarrow \left[\dim E = \sum_{i=1}^{n} \dim E_i \right]$$

Rappels de Sup sur les projecteurs : Soient F et G deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E i.e. $F \oplus G = E$. Ainsi, $\forall x \in E$, $\exists! (y, z) \in F \times G$ tel que $x = y + z$.

- Projection de E sur F de direction G : $p : \left\{ \begin{array}{c} E \to E \\ x = y + z \mapsto y \end{array} \right.$;
- Projection de E sur G de direction F : $q : \left\{ \begin{array}{c} E \to E \\ x = y + z \mapsto z \end{array} \right.$;
- $[p \in \mathcal{L}(E)$ et $p \circ p = p] \Leftrightarrow [p$ est un projecteur$]$;
- $p \circ q = 0_{\mathcal{L}(E)} = q \circ p \qquad p + q = Id_E$;
- $Im\ p = F \qquad Ker\ p = G$.

Définition : Soit n sous-espaces vectoriels de E tels que $E = \bigoplus_{i=1}^{n} E_i$ $(\star)$. La projection de E sur E_j relativement à la décomposition $(\star)$ est la projection de E sur E_j de direction $\bigoplus_{\substack{i=1 \\ i\neq j}}^{n} E_i$.

Autrement dit, $p : \left\{ \begin{array}{c} E \longrightarrow E \\ x = \sum_{i=1}^{n} x_i \mapsto x_j \end{array} \right.$.

Propriétés :
- $p_j \in \mathcal{L}(E)$ et $p_j \circ p_j = p_j$. p_j est donc un projecteur ;
- si $i \neq j$, $p_i \circ p_j = 0_{\mathcal{L}(E)} = p_j \circ p_i$;
- $\sum_{i=1}^{n} p_j = Id_E$;
- $Im\ p_j = E_j \qquad Ker\ p_j = \bigoplus_{\substack{i=1 \\ i\neq j}}^{n} E_i$.

3.4 Noyau et image d'une application linéaire :

Théorème 1 : Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$, H sous-espace vectoriel de E. Soit $\widetilde{f} : \left\{ \begin{array}{c} H \to Im\ f \\ h \mapsto f(h) \end{array} \right.$.
$\widetilde{f}$ est un isomorphisme si et seulement si H est un supplémentaire de $Ker\ f$.

Théorème 2 : théorème du rang : Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, F un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$.
Alors $Im\ f$ est de dimension finie et $\dim E = \dim(Im\ f) + \dim(Ker\ f)$.

Théorème 3 : Si E et F sont deux espaces vectoriels de même dimension finie n et si $f \in \mathcal{L}(E, F)$,
f isomorphisme $\Leftrightarrow rg(f) = n \Leftrightarrow f$ surjective $\Leftrightarrow Ker\ f = \{0_E\} \Leftrightarrow f$ injective.

Lemme : Si G et H sont deux supplémentaires d'un même sous-espace vectoriel F, alors ils ont même dimension.

Définition : Si un sous-espace vectoriel F de E admet un supplémentaire G de dimension finie, on appelle codimension de F la dimension de G noté codim F.
Si $E = F \oplus G$, codim $F = \dim G$.

Théorème du rang généralisé : Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels dont l'un au moins est de dimension finie. Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Alors
- $Im\ f$ est de dimension finie ;
- $Ker\ f$ est de codimension finie ;
- codim $(Ker\ f) = \dim(Im\ f)$.

Théorème : interpolation de Lagrange : Soient $x_1, \ldots, x_n$ n réels distincts. Soit pour $i \in [\![1, n]\!]$,

$$L_i = \frac{\prod\limits_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} (X - x_j)}{\prod\limits_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} (x_i - x_j)}$$

Alors :

- la famille $(L_i)_{i \in [\![1,n]\!]}$ est une base de $\mathbb{K}_{n-1}[X]$ dite de Lagrange relative au n-uplet $(x_1, \ldots, x_n)$;
- le problème d'interpolation i.e. chercher $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ tel que $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $P(x_i) = y_i$ où $(y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ admet une et une seule solution $P = \sum\limits_{i=1}^{n} y_i L_i$.

3.5 Dualité

Définition : hyperplan : On appelle hyperplan d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel tout sous-espace vectoriel de codimension 1.
Ainsi, [H est un hyperplan] $\Leftrightarrow$ [$\exists a \in E \setminus \{0_E\} \mid H \oplus Vect(a) = E$].

Théorème 1 : Soit $\varphi \in \mathcal{L}(E, \mathbb{K})$ i.e. une forme linéaire avec $\varphi \neq \mathcal{O}$ l'application nulle. Alors

- $Ker\ \varphi$ est un hyperplan H ;
- si $\psi \in \mathcal{L}(E, \mathbb{K})$ s'annule sur H, alors $\exists \alpha \in \mathbb{K} \mid \psi = \alpha \cdot \varphi$.

Théorème 2 : Tout hyperplan est le noyau d'une forme linéaire non nulle.

Définition : Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. On appelle dual de E que l'on note souvent $E^\star$ l'ensemble $\mathcal{L}(E, \mathbb{K})$ i.e. l'ensemble des formes linéaires de E sur $\mathbb{K}$.

Proposition : $\forall a \in E \setminus \{0_E\}$, $\exists \varphi \in \mathcal{L}(E, \mathbb{K}) \mid \varphi(a) = 1$.

Corollaire : L'ensemble $\{x \in E \mid \forall \varphi \in \mathcal{L}(E, \mathbb{K}), \varphi(x) = 0_\mathbb{K}\} = \{0_E\}$.

Définition : base dual d'une base $\mathcal{B}$ de E : Soit $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E. On appelle base duale de E la base $\mathcal{B}^\star = (e_1^\star, \ldots, e_n^\star)$ du dual $E^\star$ où $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $e_i^\star$ est défini par $\forall j \in [\![1, n]\!]$, $e_i^\star(e_j) = \delta_{i,j}$.

Théorème : $(e_1^\star, \ldots, e_n^\star)$ est bien une base du dual $E^\star$.

Conséquence : relation de dualité : Soit (e_1, e_n) une base de E et $(e_1^\star, \ldots, e_n^\star)$ sa base duale. $\forall x \in E,\ x = e_1^\star(x) e_1 + \ldots + e_n^\star(x) e_n$, $\forall \varphi \in E^\star,\ \varphi(e_1) e_1^\star + \ldots + \varphi(e_n) e_n^\star$.

Théorème : base antéduale : À toute base $\mathcal{B}'$ de $E^\star$ est associée une et une seule base $\mathcal{B}$ de E dont $\mathcal{B}'$ est la duale. $\mathcal{B}$ et appelée la base antéduale de $\mathcal{B}'$.

Théorème 1 : Soit F un sous-espace vectoriel de E de dimension finie avec $\dim F = p$, $\dim E = n$. Les formes linéaires sur E qui s'annulent sur F constituent un sous-espace vectoriel de $E^\star$ de dimension $n - p$.

Théorème 2 : Si $(\varphi_1, \ldots, \varphi_q)$ est une famille libre de $E^\star$, alors $F = \bigcap_{i=1}^{q} Ker\ \varphi_i$ est un sous-espace vectoriel de dimension $n - q$.
De plus, si $\varphi \in E^\star$, [φ s'annule sur F] $\Leftrightarrow$ $\left[\exists(\lambda_1, \ldots, \lambda_q) \in \mathbb{K}^q \ / \ \varphi = \sum_{i=1}^{q} \lambda_i \varphi_i\right]$.

3.6 Rappels et compléments de calcul matriciel

Définition : trace : Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. $M = (a_{i,j})_{i,j\in[\![1,n]\!]}$. On appelle trace de M la somme de ses éléments diagonaux : $tr(M) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,i}$.

Propriétés :

1. $tr : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ est linéaire.
2. $\forall A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $tr(A \times B) = tr(B \times A)$.
3. Si A et B sont des matrices semblables, $tr(A) = tr(B)$.

Rappels :

- Deux matrices A et B sont dites semblables s'il existe $P \in GL_n(\mathbb{K})$ telle que $B = P^{-1}AP$.
- Si E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n, de base $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$, toute matrice A est la matrice d'un endomorphisme de E dans $\mathcal{B}$ i.e. $A = M_\mathcal{B}(u)$ où $u \in \mathcal{L}(E)$.
- Si $\mathcal{B}'$ est une autre base de E, si $P = Pass(\mathcal{B}, \mathcal{B}')$, alors la matrice de u dans la base $\mathcal{B}'$ est : $A' = P^{-1}AP$.
- Ainsi deux matrices semblables sont deux matrices qui représentent le même endomorphisme dans des bases différentes.

Corollaire : Si $u \in \mathcal{L}(E)$, si $A = M_\mathcal{B}(u)$, $tr(A)$ ne dépend pas de la base $\mathcal{B}$ choisie. On la note $tr(u)$: c'est la trace de l'endomorphisme u.

Définition : Soient $A, B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$. A et B sont dites équivalentes si $\exists P \in GL_q(\mathbb{K})$, $\exists Q \in GL_p(\mathbb{K}) \ / \ B = Q^{-1}AP$.

Propriété : Deux matrices sont équivalentes si et seulement si elles ont le même rang.

Lemme : Si $M \in \mathcal{M}_{p,q}$, M est équivalentes à une matrice de format $p \times q$ où $r = rg(M)$ suivante : $\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & & 0 & & & \\ & \ddots & & & 0 & \\ 0 & & 1 & & & \\ \hline & & & & & \\ & 0 & & & 0 & \\ & & & & & \end{array}\right)_{p\times q}$.

Corollaire : $rg(t_M) = rg(M)$.

Opérations élémentaires sur les matrices :
Idée : effectuer une opération sur les lignes (resp. sur les colonnes) d'une matrice revient à multiplier cette matrice à gauche (resp. à droite) par une matrice inversible.

On applique les modification sur la matrice $\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$.

- $L_i \leftarrow \alpha L_j$: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \alpha & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ pour faire $L_2 \leftarrow L_2 + \alpha L_1$.
- $L_i \leftrightarrow L_j$: $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ pour faire $L_1 \leftrightarrow L_2$.
- $L_i \leftrightarrow \alpha \cdot L_i$, $\alpha \neq 0$: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}$ pour faire $L_3 \leftarrow \alpha \cdot L_3$.

Utilités :
- Résoudre un sustème d'équation linéaires.
- Calculer le rang d'une matrice.
- Calculer l'inverse d'une matrice (méthode de Gauss-Jordan).
- Calculer le déterminant.

Chapitre 4

Réduction des endomorphismes

4.1 Sous-espaces stables

Défintion : Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et F un sous-espace vectoriel de E.

- On dit que F est stable par u si $u(F) \subset F$ i.e. $\forall x \in F$, $u(x) \in F$. On peut alors définir la restriction $u_{|F} : \left\{ \begin{array}{l} F \to F \\ x \mapsto u(x) \end{array} \right.$ et $u_{|F} \in \mathcal{L}(E)$: $u_{|F}$ s'appelle l'endomorphisme induit de u sur F.

Propriété : Si u et v commutent, alors $Ker\ v$ et $Im\ v$ sont stables par u.

Représentation matricielle en dimension finie : Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, F un sous-espace vectoriel stable par u. Soit $(e_1, \ldots, e_p)$ une base de F et complétons là par $(e_{p+1}, \ldots, e_n)$. Soit donc $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_p, e_{p+1}, \ldots, e_n)$. Soit $M = M_{\mathcal{B}}(u)$.

$M = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \ldots & a_{p,1} & \times & \ldots & \times \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{p,1} & \ldots & a_{p,p} & \times & \ldots & \times \\ 0 & \ldots & 0 & \times & \ldots & \times \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 & \times & \ldots & \times \end{pmatrix}$ de la forme $M = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$ où $A \in \mathcal{M}_{p,p}(\mathbb{K})$, $B \in \mathcal{M}_{p,n-p}(\mathbb{K})$, $0 \in \mathcal{M}_{n-p,p}(\mathbb{K})$, $C \in \mathcal{M}_{n-p,n-p}(\mathbb{K})$.

$\det M = \det A \times \det C$.

Généralisation :

$M = \begin{pmatrix} A_1 & & & 0 \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & A_p \end{pmatrix}$

On aurait en fait $E = \bigoplus_{i=1}^{p} E_i$ où chaque E_i est stable par u (puisque visuellement, $\forall x \in E_i,\ u(x) \in E_i$), on aura $\det M = \prod_{i=1}^{p} \det(A_i)$.

4.2 Polynômes d'endomorphismes, polynômes de matrices

Définition : Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ avec $P = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i$. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

- On note $P(u)$ l'endomorphisme défini par $P(u) = \sum_{i=0}^{n} a_i u^i$ (où $u^0 = Id$)
  i.e. $P(u) = a_0 \cdot Id + a_1 \cdot u + \ldots + a_n \cdot u^n$.
- On note $P(A)$ la matrice définie par $P(A) = \sum_{i=0}^{n} a_i A^i$ (où $A^0 = I_n$)
  i.e. $P(A) = a_0 \cdot I_n + a_1 \cdot A + \ldots + a_n \cdot A^n$.

Propriété : Si $A = M_{\mathcal{B}}(u)$, $P(A) = M_{\mathcal{B}}(P(u))$.

Proposition : Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Soit $\Phi : \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{K}[X] \to \mathcal{L}(E) \\ P \mapsto P(u) \end{array} \right.$ et $\Psi : \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{K}[X] \to \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \\ P \mapsto P(A) \end{array} \right.$.
Alors les endomorphismes Φ et Ψ sont des morphismes d'algèbres.

Conséquences : Reprenons $\Phi : \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{K}[X] \to \mathcal{L}(E) \\ P \mapsto P(u) \end{array} \right.$ est un morphisme d'algèbre.
$Im\ \Phi = \{\Phi(P) \mid P \in \mathbb{K}[X]\} = \{P(u) \mid P \in \mathbb{K}[X]\}$. C'est une sous-algèbre de $\mathcal{L}(E)$ notée $\mathbb{K}[u]$.
C'est même une sous-algèbre commutative de l'algèbre non commutative $\mathcal{L}(E)$.
De même avec les matrices, $\mathbb{K}[A] = \{P(A) \mid P \in \mathbb{K}[X]\}$ est une sous-algèbre commutative de l'algèbre non commutative $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Propriétés : Soient $u, v \in \mathcal{L}(E)$.

- Si v commute avec u, v commute avec $P(u)$.
- $P({}^tA) = {}^t(P(A))$ $\quad \overline{P(A)} = \overline{P}\left(\overline{A}\right)$.
- $Im\ (P(u))$ et $Ker\,(P(u))$ sont stables par u.

Idéal annulateur et polynôme minimal : Revenons au morphisme d'algèbre $\Phi : \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{K}[X] \to \mathcal{L}(E) \\ P \mapsto P(u) \end{array} \right.$
(raisonnement identique avec les matrices).
$Ker\ \Phi = \{P \in \mathbb{K}[X] \mid P(u) = 0\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}[X]$ mais surtout un idéal de $\mathbb{K}[X]$ appelé l'idéal annulateur de l'endormorphisme u.
Or, dans $\mathbb{K}[X]$, les seuls idéaux sont du type $M \cdot \mathbb{K}[X] = (M)$ i.e. constitué des multiples de l'un d'entre eux.

- Ou $M = 0_{\mathbb{K}[X]}$, $P = 0$ est donc le seul polynôme annulateur de u (que si E est de dimension finie) ;
- Ou bien $M \neq 0_{\mathbb{K}[X]}$: on peut, quitte à le diviser par son coefficient dominant, choisir M unitaire : ce sera le « polynôme minimal » de u.

Proposition : Si $\dim E$ est finie, si $u \in \mathcal{L}(E)$, alors il existe au moins un polynôme non nul annulateur de u.

Définition : On appelle polynôme minimal de $u \in \mathcal{L}(E)$ où E est de dimension finie (resp de $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$) l'unique polynôme unitaire qui engendre l'idéal des polynômes annulateurs.

Lemme : Soit $P, Q \in \mathbb{K}[X]$ tels que $P \wedge Q = 1$. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Alors :

$$Ker\left(\left(PQ\right)\left(u\right)\right) = Ker\left(P\left(u\right)\right) \oplus Ker\left(Q\left(u\right)\right)$$

Généralisation : Si $P_1, \ldots, P_k$ sont k polynômes deux à deux premiers entre eux, alors :

$$Ker\left[\left(\prod_{i=1}^{k} P_i\right)(u)\right] = \bigoplus_{i=1}^{k} Ker\left(P_i\left(u\right)\right)$$

Théorème : théorème de décomposition des noyaux : Soit P un polynôme annulateur de u (par exemple le polynôme minimal μ_u). Si P se décompose en $P = \prod_{i=1}^{k} P_i$, avec $\forall i, j \in [\![1, k]\!],\ i \neq j,\ P_i \wedge P_j = 1$, alors $E = \bigoplus_{i=1}^{k} Ker\left(P_i\left(u\right)\right)$.

Proposition : lien avec le polynôme minimal d'un endormorphisme : Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ avec $\dim E = n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{B}$ une base de E. Soit $M = M_{\mathcal{B}}(u)$. u et M ont le même polynôme minimal : $\mu_u = \mu_M$.

Corollaire : Deux matrices semblables ont le même polynôme minimal.

Propriété : polynôme minimal et endormorphisme réduit : Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, soif F un sous-espace vectoriel de E stable par u. Soit u_F l'endomorphisme induit, alors $\mu_{u_F} | \mu_u$.

4.3 Valeurs propres

Définitions 1 : Soit $u \in \mathcal{L}(E)$.

1. Soit $\lambda \in \mathbb{K}$. On dit que λ est valeur propre de u s'il existe $x \in E \setminus \{0_E\}$ tel que $u(x) = \lambda x$.
2. Soit $x \in E \setminus \{0_E\}$: on dit que x est vecteur propre de u s'il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $u(x) = \lambda x$.
3. L'ensemble des valeurs propres d'un endomorphisme est appelé le spectre de u et est noté $Sp_{\mathbb{K}}(u)$.

Propriété : Si $\dim E$ est finie, alors : [λ est valeur propre] $\Leftrightarrow$ [$(u - \lambda \cdot Id_E) \notin GL(E)$].

Définition 2 : Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, $\lambda \in Sp(u)$. L'ensemble $E_\lambda(u) = Ker\left(u - \lambda \cdot Id_E\right)$ est un sous-espace vectoriel de E distinct de $\{0_E\}$ appelé le sous-espace propre associé à λ et à u. Il est constitué de tous les vecteurs propres associés à λ de E et de 0_E.

Proposition : Soit $u \in \mathcal{L}(E)$.

1. La somme d'une famille finie de sous-espace vectoriel propre de u distincts est nécessairement directe $\left(\bigoplus_{i=1}^{k} E_{\lambda_i}\right)$.
2. Toute famille de vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes est nécessairement libre.

Propriété : Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, $\lambda \in \mathbb{K}$, $P \in \mathbb{K}[X]$. Si $\lambda \in Sp(u)$ alors $P(\lambda) \in Sp\left(P\left(u\right)\right)$.

Théorème : valeurs propres et polynôme minimal : Soit $u \in \mathcal{L}(E)$.

1. Les valeurs propres de u sont racines de tout polynôme annulateur de u.
2. Les valeurs propres de u sont les racines du polynôme minimal de u.

Définition : cas des matrices : Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Soit $u \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^n) \mid \mathcal{M}_{\mathcal{C}_n}(\mathbb{K}^n) = M$ avec $\mathcal{C}_n$ la base canonique de $\mathbb{K}^n$.

1. Soit $\lambda \in \mathbb{K}$. On dit que λ est une valeur propre de M s'il est valeur de u donc $\exists X \in \mathbb{K}^n$ tel que $X \neq 0$ et $M \cdot X = \lambda \cdot X$.
2. Soit X un vecteur de $\mathbb{K}^n$. On dit que X est vecteur propre de M s'il est non nul et s'il existe $\lambda \in \mathbb{K} \mid M \cdot X = \lambda \cdot X$.
3. Le spectre de M est aussi le spectre de u donc l'ensemble des valeurs propres de M : on le note $Sp_{\mathbb{K}}(M)$.
4. Le sous-espace propre associé à λ est $E_\lambda(M) = Ker\,(M - \lambda \cdot I)$ i.e. $Ker\,(u - \lambda \cdot Id_E)$.

Propriété : changement de corps : Si $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $Sp_{\mathbb{R}}(M) \subset Sp_{\mathbb{C}}(M)$.

Propriétés :

1. $[\lambda \text{ valeur propre de } M] \Leftrightarrow [(M - \lambda \cdot I) \notin GL_n(\mathbb{K})] \Leftrightarrow [\det(M - \lambda \cdot I) = 0]$
2. $[\lambda \in Sp(M)] \Leftrightarrow [P(\lambda) \in Sp\,(P\,(M))]$
3. Les valeurs propres de M sont racines de tout polynôme annulateur et sont les racines de son polynôme minimal. $Sp(M) = Rac(\mu_M)$.
4. Si deux matrices sont semblables, elles ont le même spectre.

4.4 Polynôme caractéristique

Définition 1 : polynôme caractéristique d'une matrice : Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On appelle polynôme caractéristique de A le polynôme $P = \det(X \cdot I - A)$.
P est souvent noté χ_A. $d^\circ\chi_A = n$ si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. $\chi_A = X^n - tr(A) \cdot X^{n-1} + \ldots + (-1)^n \det A$.

Propriété : Deux matrices semblables ont forcément le même polynôme caractéristique.

Définition 2 : Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, $A = M_{\mathcal{B}}(u)$ où $\mathcal{B}$ est une base quelconque. On appelle polynôme caractéristique de u le polynôme $\chi_u = \chi_A$. Il ne dépend pas de la base $\mathcal{B}$ choisie. $\chi_u = X^n - tr(u) \cdot X^{n-1} + \ldots + (-1)^n \det u$. Retenons aussi que $\chi_u(\lambda) = \det(\lambda \cdot Id_E - u)$.

Proposition : cas d'un endomorphisme induit : Si u stabilise F i.e. F est stable par u où F est un sous-espace vectoriel de E, alors $\chi_{u_F} | \chi_u$ où u_F endomorphisme induit $\in \mathcal{L}(F)$.

Corollaire : Si $E = \displaystyle\bigoplus_{i=1}^{k} F_i$ et si $u \in \mathcal{L}(E)$ est tel que $\forall i \in [\![1, k]\!]$, F_i est stable par u, alors $\chi_u = \displaystyle\prod_{i=1}^{k} \chi_{u_i}$ où $u_i = u_{F_i}$ i.e. l'endomorphisme induit de u sur F_i.

Théorème : Les valeurs propres de $u \in \mathcal{L}(E)$ sont les racines du polynôme caractéristique de u.

Définition : ordre de multiplicité : Soit λ une valeur propre de u (resp. de A). On dit que λ est d'ordre $k \in \mathbb{N}^\star$ si λ est racine de χ_u (resp. de χ_A) d'ordre k.

Théorème : Si λ est valeur propre de u d'ordre m_i, alors $1 \leqslant \dim E_{\lambda_i} \leqslant m_i$.

Théorème : théorème de Hamilton-Cayley : Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ (resp. $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$). Soit χ_u le polynôme caractérisitique de u (resp. χ_A celui de A), alors $\chi_u(u) = 0_{\mathcal{L}(E)}$ (resp. $\chi_A(A) = 0$).

Corollaire : $\mu_u | \chi_u$.

4.5 Endomorphismes diagonalisables

Définitions : Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

1. On dit que u est diagonalisable s'il existe une base $\mathcal{B}$ de E pour laquelle $M_\mathcal{B}(u)$ est diagonale.
2. On dit que A est diagonalisable si elle est semblable à une matrice diagonale.

Propriété : Si A est diagonalisable en $\Delta = P^{-1}AP$, alors les valeurs propres sont les éléments de la diagonale de Δ et la multiplicité de chacune est son nombre d'occurence dans cette diagonale.

Théorème : Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Les cinq affirmations suivantes sont équivalentes.

1. u est diagonalisable.
2. E possède une base de vecteurs propres.
3. $E = \displaystyle\bigoplus_{i=1}^{k} E_{\lambda_i}$ où $k = Card(Sp(u))$ et $E_{\lambda_i} = Ker\,(u - \lambda \cdot Id_E)$.
4. $\displaystyle\sum_{i=1}^{k} \dim(E_{\lambda_i}) = n$.
5. χ_u est scindé i.e. $\chi_u = \displaystyle\prod_{i=1}^{k} (X - \lambda_i)^{m_i}$ et $\forall i \in [\![1, k]\!]$, $\dim E_{\lambda_i} = m_i$.

Corollaire : Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Si χ_u est scindé à racines simples, alors u est diagonalisable.

Lemme : Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, diagonalisable. Soit $Sp(u) = \{\lambda_i, i \in [\![1, k]\!]\}$. $\forall i \in [\![1, k]\!]$, $E_i = Ker\,(u - \lambda_i Id_E)$. Soit p_i la projection de E sur E_i de direction $\displaystyle\bigoplus_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{k} E_j$. Alors $u = \lambda_1 p_1 + \lambda_2 p_2 + \ldots + \lambda_k p_k$ et $\forall P \in \mathbb{K}$, $P(u) = P(\lambda_1)p_1 + P(\lambda_2)p_2 + \ldots + P(\lambda_k)p_k$.

Théorème : caractérisation par le polynôme minimal : Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. u est diagonalisable si et seulement si son polynôme minimal est scindé à racines simples.

Corollaire : $u \in \mathcal{L}(E)$ est diagonalisable si et seulement s'il existe un polynôme annulateur scindé à racines simples.

4.6 Endomorphismes trigonalisable

Définition : Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

1. u est dite trigonalisable s'il existe une base $\mathcal{B}$ de E pour laquelle $M_{\mathcal{B}}(u)$ est triangulaire supérieure.
2. M est dite trigonalisable si elle est semblable à une matrice T triangulaire supérieure.

Théorème : caractérisation : Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Les quatres affirmations suivantes sont équivalentes :

1. u est trigonalisable.
2. χ_u est scindé.
3. Il existe un polynôme annulateur de u scindé.
4. μ_u est scindé.

Corollaire : Si E est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel, alors tout endomorphisme u de E est trigonalisable. On aussi $\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, M est trigonalisable.

Chapitre 5

Espaces vectoriels normés : topologie

5.1 Norme

Définition : Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). On appelle norme toute application $N : E \to \mathbb{R}^+$ tel que :

1. $\forall x \in E$, $N(x)$ est bien définie et $N(x) \in \mathbb{R}^+$;
2. $\forall x \in E$, $N(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0_E$;
3. $\forall x \in E$, $\forall \alpha \in \mathbb{K}$, $N(\alpha \cdot x) = |\alpha| \cdot N(x)$;
4. $\forall (x, y) \in E^2$, $N(x + y) \leqslant N(x) + N(y)$: inégalité de Minkowski.

Propriété : seconde inégalité triangulaire : $\forall x, y \in E$, $|N(x) - N(y)| \leqslant N(x - y)$.

Définition : distance : Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel muni d'une norme N (on dit que E est un espace vectoriel normé). Alors l'application $d : \left\{ \begin{array}{c} E \times E \longrightarrow \mathbb{R}^+ \\ (u, v) \mapsto d(u, v) = \|u - v\| \end{array} \right.$ est une distance. En effet, elle vérifie les propriétés suivantes :

1. c'est bien une application de $E \times E$ dans $\mathbb{R}^+$;
2. $\forall u, v \in E$, $d(u, v) \Leftrightarrow u = v$;
3. $\forall (u, v) \in E^2$, $d(u, v) = d(v, u)$;
4. $\forall (u, v, w) \in E^3$, $d(u, w) \leqslant d(u, v) + d(v, w)$.

Corollaire : seconde inégalité triangulaire : $\forall (u, v, w) \in E^3$, $|d(u, v) - d(u, w)| \leqslant d(u, w)$.

Définition : distance à d'un « point »à une partie : Soit $x \in E$ et $A \subset E$ avec A non vide. On appelle distance de x à A le nombre $d(x, a) = Inf\ (\{d(x, y), y \in A\})$.

Propriété : $\forall x, y \in E$, $|d(x, a) - d(y, a)| \leqslant d(x, y)$.

Proposition : norme produit : Si E et F sont deux $\mathbb{K}$-espace vectoriel normés par des normes N_1 et N_2, alors l'application $N : \left\{ \begin{array}{c} E \times F \longrightarrow \mathbb{R}^+ \\ (u, v) \mapsto N(u, v) = Max(N_1(u), N_2(v)) \end{array} \right.$ est une norme sur l'espace vectoriel produit $E \times F$. N est souvent appelé norme produit.

Généralisation : Avec n espace vectoriel normé $F_1, \ldots, F_n$. La norme produit sur $E = F_1 \times \ldots \times F_n$ est : $N : \left\{ \begin{array}{l} F_1 \times \ldots F_n \longrightarrow \mathbb{R}^+ \\ (x_1, \ldots, x_n) \mapsto Max\,(\|x_i\|_{F_i}, i \in [\![1, n]\!]) \end{array} \right.$.

Définitions : boule ouverte - boule fermée : Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé. Soit $a \in E$, $r \in \mathbb{R}^{\star+}$.

- On appelle boule ouverte de centre a de rayon r est : $\mathcal{B} = \{x \in E \mid d(a,x) < r\}$.
- On appelle boule fermée de centre a de rayon r est : $\mathcal{B}_f = \{x \in E \mid d(a,x) \leqslant r\}$.

Définition : partie convexe : Soit $A \subset E$. A convexe $\Leftrightarrow \forall a, b \in A,\ [a,b] \in A$.

Propriété : Les boules ouvertes et fermées de E sont des parties convexes de E.

Définition : normes équivalentes : Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé et N_1 et N_2 deux normes sur E.

1. On dit que N_1 est dominée par N_2 s'il existe $\alpha \in \mathbb{R}^{\star+}$ tel que : $\forall x \in E,\ N_1(x) \leqslant \alpha N_2(x)$.
2. On dit que N_1 et N_2 sont équivalentes si N_1 est dominée par N_2 et N_2 est dominée par N_1 ou encore, $\exists \alpha, \beta \in \mathbb{K}^\star$ tels que $\forall x \in E,\ \alpha N_2(x) \leqslant N_1(x) \leqslant \beta N_2(x)$.

Si deux normes sont équivalentes, les notions de limites, de convergences, de continuité, etc ne dépendent pas de la norme choisie. Seule exception : le caractère lipschitzien d'une fonction.

Théorème : théorème de Riesz : Dans un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, toutes les normes sont équivalentes.

Définitions : parties bornées : Soit E un espace vectoriel normé de norme notée $\|.\|_E$.

1. Une partie A non vide de E est dite bornée si $\exists k \in \mathbb{R}^+$ tel que $\forall x \in A,\ \|x\|_E \leqslant k$.
2. Une fonction $f : X \to E$ où X est un ensemble quelconque non vide est dite bornée si la partie $f(X) = \{f(x) \mid x \in X\}$ est bornée.
   Ou encore $\exists k \in \mathbb{R}^+$ tel que $\forall x \in X,\ \|f(x)\|_E \leqslant k$.

Proposition : L'espace vectoriel $\mathcal{B}(X, E)$ des fonctions $f : X \to E$ bornées où X non vide et E un espace vectoriel normé est lui-même normé par $\|f\|_\infty = Sup\{\|f(x)\|_E \mid x \in X\}$.

Définition : fonctions k-lipschitziennes : Soit $f : E \to F$ où E et F sont des espaces vectoriels normés. Soit $k \in \mathbb{R}^+$. On dit que f est k-lipschitzienne si :

$$\forall (x,y) \in E^2,\ \|f(x) - f(y)\|_F \leqslant k\|x - y\|_E$$

Propriété : Si $f : E \to F$ est k-lipschitzienne et $g : F \to G$ est k'-lipschitzienne avec $k, k' \in \mathbb{R}^+$, alors $(g \circ f)$ est $k \cdot k'$-lipschitzienne.

5.2 Suites et séries dans un espace vectoriel normé

Définition : suites convergentes - divergentes : Soit $u \in E^{\mathbb{N}}$ i.e. $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite à valeur dans E un espace vectoriel.

1. S'il existe $l \in E$ tel que $\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N}$, si $n \geqslant n_0$, alors $\|u_n - l\|_E \leqslant \varepsilon$, on dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente, que sa limite est l et on écrit $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$.
2. Une suite divergente est une suite non convergente.

Proposition : cas d'un espace vectoriel produit : Soit $E = \prod_{j=1}^{k} E_j$ un espace vectoriel produit normé. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$ i.e. $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \in E$ donc $u_n = (u_{n,1}, \ldots, u_{n,k})$ où $\forall j \in [\![1, k]\!],\ u_{n,j\in E_j}$. Soit $l = (l_1, \ldots, l_k) \in E$.

$$u_n \underset{n\to+\infty}{\xrightarrow{\|.\|_E}} l \Longleftrightarrow \forall j \in [\![1, k]\!],\ u_{n,j} \underset{n\to+\infty}{\xrightarrow{\|.\|_{E_j}}} l_j$$

Proposition : On retrouve les même propriétés algébriques et structures comme l'unicité de la limite, les opérations sur les limites, etc.

Définition : valeur d'adhérence : Soit $(u_n)_n \in E^{\mathbb{N}}$ et $\alpha \in E$. On dit que α est valeur d'adhérence de la suite $(u_n)_n$ si elle est limite d'une suite extraite de $(u_n)_n$.

Proposition : Toute suite convergente admet une et une seule valeur d'adhérence.

Théorème : théorème de Bolzano-Weirtrass : Le théorème de Bolzano-Weirtrass (vrai dans $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ et tout $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie) peut s'énoncer « toute suite bornée de E admet au moins une valeur d'adhérence ».

Définition : domination et négligeabilité : Soient $(u_n)_n \in E^{\mathbb{N}}$ et $(\alpha_n)_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ avec E un espace vectoriel normé.

1. On dit que $(u_n)_n$ est dominée par $(\alpha_n)_n$ et on écrit $u_n = O(\alpha_n)$ si $\exists k \in \mathbb{R}^+,\ \exists n_0 \in \mathbb{N}$ tel que si $n \geqslant n_0$ alors $\|u_n\|_E \leqslant k|\alpha_n|$.
2. On dit que $(u_n)_n$ est négligeable devant $(\alpha_n)_n$ et on écrit $u_n = o(\alpha_n)$ si $\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N}$ tel que si $n \geqslant n_0$ alors $\|u_n\|_E \leqslant \varepsilon|\alpha_n|$.

Définition : équivalences de suites : Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$. On dit que $(u_n)_n$ est équivalente à $(v_n)_n$ et on écrit $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n$ si $u_n - v_n = o\left(\|v_n\|\right)$.

Définition : séries dans un espace vectoriel normé : Soit $(u_n)_n \in E^{\mathbb{N}}$. Soit $(S_n)_n \in E^{\mathbb{N}}$ définie par $\forall n \in \mathbb{N},\ S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$. On dit que la série $\sum u_n$ converge si la suite des sommes partielles $(S_n)_n$ converge. On note alors $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} S_n$.

5.3 Élements de topologie

Définitions : voisinage, ouvert, fermé :

1. On dit que $V \in \mathcal{P}(E)$ où E est un espace vectoriel normé est un voisinage de $a \in E$ s'il existe $r > 0$ tel que $\mathcal{B}(a, r) \subset V$. On note $\mathcal{V}(a)$ l'ensemble des voisinages de a.
2. On dit que $\Omega \in \mathcal{P}(E)$ est un ouvert s'il est voisinage pour chacun de ses points. Autrement dit, Ω ouvert $\Leftrightarrow \forall a \in \Omega,\ \exists r > 0$ tel que $\mathcal{B}(a, r) \in \mathcal{V}(a)$.
3. On appelle fermé tout ensemble F dont le complémentaire $\complement_E F$ est ouvert.

Propriétés :

1. $\varnothing$ et E sont à la fois ouverts et fermés.
2. Toute réunion quelconque d'ouverts est un ouvert et toute intersection finie d'ouverts est un ouvert.
3. Toute intersection quelconque de fermés est un fermé et toute réunion finie de fermés est un fermé.

Théorème : caractérisation séquentielle des fermés : Soit F une partie d'un espace vectoriel normé E. [F est fermé] $\Leftrightarrow$ [Toute suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de F qui converge admet une limite qui appartient à F].

Définition : ouverts, fermés, voisinages « relatifs » : Soit A une partie E. On dit que Ω est un ouvert (resp. fermé, resp. un voisinage) relatif de A s'il existe un ouvert U (resp. un fermé, resp. un voisinage) de E tel que $\Omega = U \cap A$.

Définition : adhérence : Soit $A \in \mathcal{P}(E)$ et $a \in E$. On dit que a est adhérent à A si $\forall r > 0,\ \mathcal{B}(a,r) \cap A \neq \varnothing$.
L'« adhérence » de A est l'ensemble des points adhérents à A. Elle est noté $\overline{A}$.

Définition : intérieur : Soit $A \in \mathcal{P}(E)$ et $a \in E$. On dit que a est « intérieur » à A si $\exists r > 0/\ \mathcal{B}(a,r) \subset A$.
L'intérieur de A est l'ensemble des points intérieurs à A. Il est noté $\mathring{A}$.

Théorème : caractérisation séquentielle d'un point adhérent : Soit $A \in \mathcal{P}(E)$, $x \in E$.
$\left[x \in \overline{A}\right] \Leftrightarrow \left[\exists (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in A^{\mathbb{N}} \mid \lim\limits_{n\to+\infty} a_n = x\right] \Leftrightarrow [\forall r > 0,\ \mathcal{B}(x,r) \cap A \neq \varnothing]$.

Propriétés : Soit $A, B \in \mathcal{P}(E)$.

1. $\complement\overline{A} = \widehat{\complement A}^{\circ}$ $\qquad \complement\mathring{A} = \overline{\complement A}$;
2. $[A \subset B] \Leftrightarrow \left[\mathring{A} \subset \mathring{B} \text{ et } \overline{A} \subset \overline{B}\right]$;
3. $\mathring{A} \subset A \subset \overline{A}$;
4. $[A \text{ ouvert}] \Leftrightarrow [A = \mathring{A}]$ $\qquad [A \text{ fermé}] \Leftrightarrow [A = \overline{A}]$;
5. $\mathring{A}$ est ouvert et c'est le plus grand ouvert inclus dans A ;
6. $\overline{A}$ est fermé et c'est le plus petit fermé inclus dans A.

Définiton : frontière : Soit $A \in \mathcal{P}(E)$ avec E un espace vectoriel normé. La frontière de A est l'ensemble $FrA = \overline{A} \setminus \mathring{A} = \overline{A} \cap \complement\mathring{A}$.

Propriétés : FrA est fermé et $FrA = Fr\left(\complement A\right)$.

Définition : partie dense : Soit $A, B \in \mathcal{P}(E)$. On dit que A est dense dans B si $\overline{A} \supset B$.
Notamment, pour $B = E$. A dense dans $E \Leftrightarrow \overline{A} = E$.

Théorème : caractérisation séquentielle de la densité : A dense dans $E \Leftrightarrow \forall x \in E,\ x \in \overline{A}$
$\Leftrightarrow \forall x \in E,\ \exists (a_n)_n \in A^{\mathbb{N}}$ telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = x$.

5.4 Fonctions dans un espace vectoriel normé : limite, continuité

Définition : limite d'une fonction en un point : Soit $f : A \to F$ où $A \subset E$ et E, F deux espaces vectoriels normés. Soit $a \in \overline{A}$, soit $l \in F$.
On dit que f admet pour limite l en a (ou au point a) et on écrit $\lim\limits_{x \to a} f(x) = l$ ou $\lim\limits_{a} f = l$ i.e. si $\forall \varepsilon > 0,\ \exists \alpha > 0$ tel que $\|x - a\|_E < \alpha$ et $x \in A$, alors $\|f(x) - l\|_F \leqslant \varepsilon$.

Théorème : caractérisation séquentielle : Soit $f : A \to F$ avec $A \subset E$ et E, F deux espaces vectoriels normés. Soit $a \in \overline{A},\ l \in F$. $\left[\lim\limits_{a} f = l\right] \Leftrightarrow [\forall (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in A^{\mathbb{N}}$ qui converge vers a, la suite $\left(f\left(x_n\right)\right)_n$ converge vers $l]$
Si $a \in A$, $[f$ continue en $a] \Leftrightarrow [\forall (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que si $x_n \to a$, alors $f(x_n) \to f(a)]$

Proposition : limite et voisinage : Soit $f : A \to F$ avec $A \subset E$ et E, F deux espaces vectoriels normés. Soit $a \in \overline{A}$, $l \in F$. $\left[\lim\limits_{a} f = l\right] \Leftrightarrow [\forall W \in \mathcal{V}(l),\ \exists V \in \mathcal{V}(a)$ tel que $f(V \cap A) \subset W]$

Définition : domination, négligeabilité : Soit $f : A \to F$ et $\varphi : A \to \mathbb{R}$ avec $A \subset E$ et E, F deux espaces vectoriels normés. Soit $a \in A$.

1. On dit que f est dominée par φ au voisinage de a et on écrit $f = \underset{a}{O}(\varphi)$ si $\exists k \in \mathbb{R}^{+\star},\ \exists V \in \mathcal{V}(a)$ tel que $\forall x \in V \cap A,\ \|f(x)\|_F \leqslant k|\varphi(x)|$.
2. On dit que f est négligeable devant φ au voisinage de a et on écrit $f = \underset{a}{o}(\varphi)$ si $\forall \varepsilon > 0,\ \exists V \in \mathcal{V}(a)$ tel que $\forall x \in V \cap A,\ \|f(x)\|_F \leqslant \varepsilon|\varphi(x)|$.

Définition : équivalence : Soit $f : A \to F$ et $g : A \to F$ avec $A \subset E$ et E, F deux espaces vectoriels normés. Soit $a \in A$.
On dit que f est équivalente à g au voisinage de a et on écrit $f \underset{a}{\sim} g$ si $f = g + o\left(\|g\|\right)$

Définition : continuité sur une partie A : Soit $f : A \to F$ avec F un espace vectoriel. f est dite continue sur A si elle est continue en chaque point de A.

Proposition : continuité et densité : Soit $A \in \mathcal{P}(E)$ avec E un espace vectoriel normé et $B \in \mathcal{P}(E)$ telle que B dense dans A. Soit f, g deux fonctions continues de A dans F avec F un espace vectoriel normé. Si f et g coïncident sur B (i.e. $f_{|B} = g_{|B}$) alors f et g sont égales.
Autrement dit, si B est dense dans A, si $f, g \in \mathcal{C}(A, F)$, si $\forall x \in B,\ f(x) = g(x)$, alors $\forall x \in A,\ f(x) = g(x)$.

Théorème : continuité et topologie : Soit $d : E \to F$ avec E, F deux espaces vectoriels normés. Les trois affirmations suivantes sont équivalentes :

1. f est continue sur E ;
2. l'image réciproque de tout ouvert de F est un ouvert de E ;
3. l'image réciproque de tout fermé de F est un fermé de E.

5.5 Applications linéaires continues

Théorème fondamental : Soit E et F deux espaces vectoriels normés. Soit $u \in \mathcal{L}(E,F)$. Les affirmations suivantes sont équivalentes :

1. $\exists k \in \mathbb{R}^+$ tel que $\forall x \in E,\ \|u(x)\|_F \leqslant k\|x\|_E$;
2. u est continue ;
3. u est continue en 0_E ;
4. u est bornée sur la boule unité fermée $\mathcal{B}_f(0_E, 1)$;
5. u est bornée sur la sphère unité $\mathcal{S}(0_E, 1)$.

Proposition : Soit N_1 et N_2 deux normes de E un espace vectoriel normé. Les affirmations suivantes sont équivalentes :

1. N_1 et N_2 sont équivalentes ;
2. $Id : \begin{cases} (E, N_1) \to (E, N_2) \\ x \mapsto x \end{cases}$ est bicontinue ;
3. les ouverts de E pour la norme N_1 sont les ouverts de E pour la norme N_2.

Propostion : Soit $u \in \mathcal{LC}(E,F)$ avec E, F deux espaces vectoriels normés. Les trois nombres suivants sont égaux et leur valeur est notée $|||u|||$.

- $a = \underset{\substack{x\in E \\ \|x\|_E = 1}}{Sup} \|u(x)\|_F = Sup\left\{\|u(x)\|_F,\ x \in \mathcal{S}(0_E, 1)\right\}$;
- $b = \underset{\substack{x\in E \\ \|x\|_E \leqslant 1}}{Sup} \|u(x)\|_F = Sup\left\{\|u(x)\|_F,\ x \in \mathcal{B}_f(0_E, 1)\right\}$;
- $c = \underset{x\in E\setminus\{0_E\}}{Sup} \dfrac{\|u(x)\|_F}{\|x\|_E} = Sup\left\{\dfrac{\|u(x)\|_F}{\|x\|_E},\ x \in E\setminus\{0_E\}\right\}$.

Proposition : L'application $|||.||| : \begin{cases} \mathcal{LC}(E,F) \to \mathbb{R}^+ \\ u \mapsto |||u||| \end{cases}$ avec E, F deux espaces vectoriels normés est une norme sur $\mathcal{LC}(E,F)$ et est appelée la « norme subordonnée ».

Propriété : Soit E un espace vectoriel normé et $u \in \mathcal{LC}(E,F)$, $\forall x \in E$, $\|u(x)\|_F \leqslant |||u||| \times \|x\|_E$.

Conséquence : Soit E un espace vectoriel normé et $u \in \mathcal{LC}(E,F)$,
$|||u||| = Min\left(\left\{k \in \mathbb{R}^+ \text{ tel que } \forall x \in E,\ \|u(x)\|_F \leqslant k\|x\|_E\right\}\right)$.

Définition : notion d'algèbre normée : Une algèbre $(\mathcal{A}, +, \times, \cdot)$ est dite normée s'il existe une norme N sur l'espace vectoriel $(\mathcal{A}, +, \cdot)$ qui vérifie en outre deux propriétés :

4. $\forall (u,v) \in \mathcal{A}^2,\ N(u \times v) \leqslant N(u) \times N(v)$;
5. $N(1_{\mathcal{A}}) = 1$.

On dit alors que N est une norme d'algèbre.

Proposition : $(\mathcal{LC}(E), |||.|||)$ est une algèbre normée. On a notamment $|||u \circ v||| \leqslant |||u||| \times |||v|||$.

Proposition : cas des applications bilinéaires : Soit $B : E \times F \to G$ une application bilinéaire où E, F et G sont trois espaces vectoriels normées. S'il existe $k \in \mathbb{R}^+$ tel que $\forall (x,y) \in E \times F$, $\|B(x,y)\| \leqslant k\|x\|_E \times \|y\|_F$ alors B est continue.

Chapitre 6

Espaces vectoriels normés : compacité, complétude

6.1 Compacité

Théorème : théorème de Bolzano-Weirtrass : De toute suite bornées de $\left(\mathbb{K}^k\right)^{\mathbb{N}}$ où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et $k \in \mathbb{N}^\star$, on peut extraire une suite convergente.

Définition : partie compacte : Soit E un espace vectoriel normé et A une partie de E. A est dite compacte si toute suite d'éléments de A admet au moins une valeur d'adhérence $a \in A$.

Théorème 1 : Tout compact est nécessairement fermé et borné.

Propositions : Soit E et F deux espaces vectoriels normés.

1. Si A est un compact de E et si $B \subset A$ et si B est fermé, alors B est compact.
2. Soit A (resp. B) un compact de E (resp. de F), alors $A \times B$ est un compact de $E \times F$.

Théorème 2 : L'image d'un compact par une fonction continue est un compact.
Aurement dit : si $f \in \mathcal{C}(E, F)$ où E et F sont deux espaces vectoriels normés. Si A est un compact de E, alors $f(A)$ est un compact de F.

Théorème : Toute fonction continue sur un segement de $\mathbb{R}$ et à valeur dans $\mathbb{R}$ est bornée et atteint ses bornes.
Plus précisement : si $f \in \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$, alors $\exists m, M \in \mathbb{R}$ tels que $f([a, b]) = [m, M]$.

Proposition : Soit $f : A \to \mathbb{R}$ continue où A est un compact d'un espace vectoriel normé E, alors f est bornée et atteint ses bornes.

Définition : uniforme continuité : Soit $f : A \to F$ avec E, F deux espaces vectoriels normés et $A \subset E$. f est dite uniformément continue sur A si :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \alpha > 0 \text{ tel que } \forall (x, y) \in A^2,\ \|x - y\|_E \leqslant \alpha \Rightarrow \|f(x) - f(y)\|_F \leqslant \varepsilon$$

Théorème : théorème de Heine : Toute fonction continue sur un compact est uniformément continue.

6.2 Complétude

Définition : suites de Cauchy : Soit E un espace vectoriel normé. Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$ est dite de Cauchy si :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall (m,n) \in \mathbb{N}^2,\ \text{si } n \geqslant m \geqslant n_0 \text{ alors } \|u_n - u_m\|_E \leqslant \varepsilon$$

Propriétés :

1. Toute suite convergente est une suite de Cauchy.
2. Toute suite de Cauchy est bornée.
3. Toute suite de Cauchy qui admet une valeur d'adhérence est convergente.

Définition : partie complète : Soit E un espace vectoriel normé. Soit $A \in \mathcal{P}(E)$. On dit que A est complète si toute suite de Cauchy d'éléments de A est convergente dans A (i.e. sa limite appartient à A).

Propositions :

1. Toute partie complète est fermée.
2. Toute partie fermée d'une partie complète est complète.
3. Toute partie compacte est complète.

Définition : espace de Banach : On appelle espace de Banach tout espace vectoriel normé complet.

Proposition : Les parties complètes d'un espace de Banach sont ses parties fermées.

Théorème : critère de Cauchy pour les fonctions : Soit F un espace de Banach, E un espace vectoriel normé et $A \subset E$. Soit $f : A \Rightarrow F$ et $a \in \overline{A}$. $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ existe si et seulement si

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \alpha > 0, \text{ tel que } \forall (x,y) \in A^2, \text{ si } \|x-a\|_E \leqslant \alpha \text{ et } \|y-a\|_E \leqslant \alpha \text{ alors } \|f(x)-f(y)\|_F \leqslant \varepsilon.$$

Chapitre 7

Espaces vectoriels normés : dimension finie, connexité par les arcs

7.1 Espaces vectoriels de dimension finie

Théroème fondamental : théorème de Riesz : Dans un espace vectoriel normé de dimension finie, toutes les normes sont équivalentes.

Conséquences : En dimension finie, quelque soit la question topologique posée (à l'exception près de la k-lipschitzianité), le résultat ne dépend pas de la norme choisie et on choisit la norme la plus adaptée.
Une fonction est k-lipschitzienne pour une norme et elle sera k'-lipschitzienne pour une autre norme.

7.2 Compacité

Théorème : théorème de Bolzano-Weirstrass : Si E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$), toute suite bornée d'éléments de E admet au moins une valeur d'adhérence.

Proposition : Les compacts d'un espace vectoriel normé de dimension finie sont ses fermés bornés.

7.3 Complétude

Théorème : Tout espace vectoriel normé de dimension finie est un espace de Banach (i.e. est complet).

Proposition : Les parties complètes d'un espace vectoriel de dimension finie sont ses parties fermées.

Corollaire : Tout sous-espace vectoriel de dimension finie d'un espace vectoriel normé quelconque E est fermé.

7.4 Continuité et linéarité

Théorème : Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$ où E est un espace vectoriel normé de dimension finie et F un espace vectoriel normé quelconque, alors f est continue.

Proposition : Soit E et F deux espaces vectoriels de diemensions finies. Soit $(f_n)_n \in \mathcal{L}(E,F)^{\mathbb{N}}$. Soit $\forall n \in \mathbb{N},\ A_n = \mathcal{M}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f_n) = (a^n_{i,j})$. $A = (a_{i,j})_{i,j} = \mathcal{M}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f)$. Les cinq affirmations suivantes sont équivalentes :

1. $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n = f$;
2. $\forall x \in E,\ \lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = f(x)$;
3. $\forall j \in [\![1,q]\!],\ \lim\limits_{n\to+\infty} f_n(e_j) = f(e_j)$;
4. $\forall (i,j) \in [\![1,p]\!] \times [\![1,q]\!],\ \lim\limits_{n\to+\infty} a^n_{i,j} = a_{i,j}$;
5. $\lim\limits_{n\to+\infty} A_n = A$ quelque soit les normes choisies.

Proposition : Soit E, F et G trois espaces vectoriels normés. Si $\dim E$ et $\dim F$ sont finies, si f est linéaire de $E \times F$ dans G, alors f est continue.

7.5 Connexité par arcs

Définition : arc chemin : Soit $A \subset E$ où E est un espace vectoriel normé. Soit $(a,b) \in A^2$. On appelle arc (ou chemin) de A joignant a à b toute application continue $\varphi : [\alpha,\beta] \to A$ telle que $\varphi(\alpha) = a$ et $\varphi(\beta) = b$ où $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$ tels que $\alpha < \beta$.

Définition : partie connexe par arcs : Une partie A d'un espace vectoriel normé E est dite connexe par arcs si pour tout couple $(a,b) \in A^2$, il existe un arc joignant a et b.

Définition : partie étoilée : A une partie d'un espace vectoriel normé E est dite étoilée si $\exists a \in A$ tel que $\forall b \in A,\ [a,b] \subset A$.

Théorème : connexité par arcs et continuité : Soit $f \in \mathcal{C}(E,F)$ avec E, F deux espaces vectoriels normés. Soit $A \in \mathcal{P}(E)$. Si A est connexe par arcs, alors $f(A)$ est connexe par arcs.

Théorème : Les parties connexes par arcs de $\mathbb{R}$ sont les intervalles (autrement dit les parties convexes).

Théorème : théorème des valeurs intermédiaires généralisé : Soit E un espace vectoriel normé, soit $A \subset E$ avec A connexe par arcs. Soit $f \in \mathcal{C}(A,\mathbb{R})$.
- $f(A)$ est un intervalle ;
- $\forall (a,b) \in f(A)^2,\ \forall \lambda \in [a,b]$ ou $[b,a]$, $\exists x \in A$ tel que $f(x) = \lambda$.

Théorème : Soit $f : I \to J$ continue. Si f est bijective, alors elle est strictement monotone sur I.

7.6 Compléments sur les séries dans un espace de Banach

Proposition : critère de Cauchy : Soit $\sum u_n$ une série dans un espace de Banach E avec $(u_n)_n \in E^{\mathbb{N}}$. Elle est convergente si et seulement si

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \text{si } n \geqslant m \geqslant n_0,\ \text{alors } \left\| \sum_{i=m+1}^{n} u_i \right\| \leqslant \varepsilon$$

Théorème : Soit E un espace de Banach. Si la série $\sum u_i$ est absolument convergente, alors elle est convergente.

Définition : Une algèbre de Banach est une algèbre normée complète et de dimension finie (en tant qu'espace vectoriel).

Théorème : série géométrique dans un espace de Banach : Soit $(\mathcal{A}, +, \times, \cdot)$ une algèbre de Banach de norme notée $\|.\|$. Soit $u \in \mathcal{A}$ tel que $\|u\| < 1$, alors

- la série $\sum u^n$ converge absolument ;
- $(1_A - u)$ est inversible (dans l'anneau $\mathcal{A}$) et $(1_{\mathcal{A}} - u)^{-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} u^n$.

Théorème : série exponentielle : Soit $(\mathcal{A}, +, \times, \cdot)$ une algèbre de Banach. Pour tout $u \in \mathcal{A}$, la série « exponentielle » $\sum \frac{u^n}{n!}$ converge absolument et $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{u^n}{n!}$ est notée $\exp(u)$ ou e^u.

De plus, $\|e^u\| \leqslant e^{\|u\|}$.
Enfin, si u et $v \in A$ commutent, $e^{u+v} = e^u \times e^v$.

Chapitre 8

Suites et séries de fonctions

Dans tout le chapitre, les applications sont du type $A \to F$ où $A \subset E$ avec E un espace vectoriel normé et F un espace de Banach. Le plus souvent, $E = F = \mathbb{R}$. $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

8.1 Suites de fonctions : divers types de convergence

Définition : convergence simple : Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de A dans F. Soit f une fonction de A dans F. On dit que $(f_n)_n$ converge simplement vers f et on écrit $f_n \xrightarrow{\text{c.s.}} f$ si

$$\forall x \in A,\ f_n(x) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f(x)$$

Définition : convergence uniforme : Soit $\forall n \in \mathbb{N}\ f_n : A \to F$,$f : A \to F$. On dit que la suite de fonction $(f_n)_n$ converge uniformément vers f si :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ tel que si } n \geqslant n_0 \text{ alors } \forall x \in A,\ \|f_n(x) - f(x)\| \leqslant \varepsilon$$

On note $f_n \xrightarrow{\text{c.u.}} f$.

Proposition : Si $f_n \xrightarrow{\text{c.u.}} f$, alors $f_n \xrightarrow{\text{c.s.}} f$.

Théorème 1 : conservation de la continuité par convergence uniforme : Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de A dans F. Soit $f : A \to F$. Si $\forall n \in \mathbb{N}$ (ou à partir d'un certain rang), f_n est continue et si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f, alors f est continue.

Théorème 2 : double passage à la limite : Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de A dans F (F étant un espace de Banach). Soit $a \in \overline{A}$. On suppose :
- $\forall n \in \mathbb{N},\ \lim\limits_{x\to a} f_n(x)$ existe et vaut b_n ;
- $(f_n)_n$ converge uniformément vers f.

Alors :
- $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ existe ;
- $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} b_n$.

Théorème 3 : conservation du caractère borné par convergence uniforme : Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de A dans F. Soit $f : A \to F$. Si $(f_n)_n$ converge uniformément vers f et $\forall n \in \mathbb{N},\ f_n$ est bornée, alors f est bornée.

Définition - proposition : convergence en moyenne : On définit pour toute fonction $f \in \mathcal{C}([a,b],\mathbb{K})$ la norme N_1 (implicitement, $a < b$) :

$$N_1(f) = \int_a^b |f(t)|dt = \|f\|_1$$

Définition : Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in (\mathcal{C}([a,b],\mathbb{K}))^{\mathbb{N}}$. Soit $f \in \mathcal{C}([a,b],\mathbb{K})$. On dit que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en moyenne vers f (au sens de $\|.\|_1$ si $\lim\limits_{n\to+\infty} \|f_n - f\|_1 = 0$.

Proposition : lien entre convergence en moyenne et convergence des intégrales : Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $f \in \mathcal{C}([a,b],\mathbb{K})$. Si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en moyenne vers f sur $[a,b]$, alors :

$$\int_a^b f_n(t)dt \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_a^b f(t)dt$$

Théorème : lien entre convergence uniforme, en moyenne et des intégrales : Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur $[a,b]$, alors $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en moyenne vers f sur $[a,b]$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_a^b f_n(t)dt = \int_a^b f(t)dt$.

Définition : Soit $f_n : I \to \mathbb{K}$ et $f : I \to \mathbb{K}$ avec I un intervalle de $\mathbb{R}$. On dit que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur tout segment de I si pour tout segment J tel que $J \subset I$, $f_{n|_J} \overset{\text{c.u.}}{\longrightarrow} f_{|_J}$.

Proposition : Soit $f_n : I \to \mathbb{K}$ et $f : I \to \mathbb{K}$ avec I un intervalle de $\mathbb{R}$. Si $\forall n \in \mathbb{N}$, f_n est continue sur I et si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur tout segment de I, alors f est continue sur I.

Définition : convergence quadratique : On dit que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in (\mathcal{C}([a,b],\mathbb{K}))^{\mathbb{N}}$ converge vers f en moyenne quadratique si $\|f_n - f\|_2 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. C'est donc la convergence au sens $\|.\|_2$ avec $\forall f \in \mathcal{C}([a,b],\mathbb{R}),\ \|f\|_2 = \left(\int_a^b |f(t)|^2 dt\right)^{1/2}$.

Lemme : $\forall f \in \mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$,

$$\|f\|_1 \leqslant \sqrt{b-a}\|f\|_2 \leqslant (b-a)\|f\|_\infty$$

Théorème : lien entre convergence uniforme, quadratique et en moyenne : Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{C}([a,b],\mathbb{K})^{\mathbb{N}}$.

$$\left[f_n \overset{\text{c.u.}}{\longrightarrow} f\right] \Rightarrow \left[f_n \overset{\|.\|_2}{\longrightarrow} f\right] \Rightarrow \left[f_n \overset{\|.\|_1}{\longrightarrow} f\right] \Rightarrow \left[\int_a^b f_n(t)dt \to \int_a^b f(t)dt\right]$$

8.2 Convergence uniforme et dérivation

Proposition : convergence uniforme et primitivation : Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in (\mathcal{C}(I,\mathbb{K}))^{\mathbb{N}}$. Soit $f \in \mathcal{C}(I,\mathbb{K})$.
On suppose que $(f_n)_n$ converge uniformément vers f sur tout segment $J \subset I$. Soit, pour tout entier naturel n, g_n la primitive de f_n sur I qui s'annule en a et g la primitive de f sur I qui s'annule en a.
Alors $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers g sur J.

Convergence uniforme et dérivation : Soit $(f_n)_n \in \left(\mathcal{C}^1(I,\mathbb{K})\right)^{\mathbb{N}}$. On suppose que :

- $f_n \xrightarrow{\text{c.s.}} f$ sur I ;
- $f_n' \xrightarrow{\text{c.u.}} g$ sur tout segment de I.

Alors

- $f \in \mathcal{C}^1(I,\mathbb{K})$;
- $f' = g$;
- $f_n \xrightarrow{\text{c.u.}} f$ sur tout segment de I.

8.3 Application aux séries de fonctions

Définition : Si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une série de fonctions de A dans $\mathbb{K}$, $\sum f_n$ désigne une « série de fonction » (de terme général f_n). On note, pour tout entier naturel n : $S_n = \sum_{k=0}^{n} f_k$ la somme partielle, c'est une fonction.
Si la suite de fonction $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge (simplement ou uniformément) vers S, on dira que la série de fonctions $\sum f_n$ converge et a pour somme S.

Définition : convergence simple : On dit que $\sum f_n$ converge simplement et a pour somme S si la suite de fonction $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers S.
Ou encore si $\forall x \in A$, $\sum f_n(x)$ converge et a pour somme un scalaire noté $S(x)$.

Définition : convergence uniforme : $\sum f_n$ converge uniformément et a pour somme S si $S_n \xrightarrow{\text{c.u.}} S$ i.e. $\lim_{n\to+\infty} \|S - S_n\|_\infty = 0$.

Théorème :

1. Si $\sum f_n$ converge uniformément alors $f_n \xrightarrow{\text{c.u.}} 0$;
2. $\sum f_n$ converge uniformément et a pour somme S où S est la somme de $\sum f_n$ au sens de la convergence simple $\Leftrightarrow R_n \xrightarrow{\text{c.u.}} 0$ où R_n est le reste d'ordre n : $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k$.

Définition : convergence absolue : On dit que la série de fonctions $\sum f_n$ converge absolument si la série de fonction $\sum |f_n|$ converge simplement.

Proposition : Convergence absolue $\Rightarrow$ convergence simple.

Définition : convergence normale : Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in (\mathcal{B}(A,\mathbb{K}))^{\mathbb{N}}$. On dit que la série de fonction $\sum f_n$ converge normalement si la série numérique $\sum \|f_n\|_\infty$ converge.

Théorème : lien entre convergence normale et autre type de convergence : Si $\sum f_n$ converge normalement alors elle converge uniformément et absolument et donc simplement.

Théorème : Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions, $f_n : A \to \mathbb{K}$. On suppose que $\sum f_n$ converge uniformément et a pour somme $S = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$.

1. Conservation de la continuité pour la somme d'une série convergeant uniformément : si $\forall n \in \mathbb{N}$, $f_n \in \mathcal{C}(A, \mathbb{K})$, alors $S \in \mathcal{C}(A, \mathbb{K})$.
2. Intervertion des symboles $\lim_{x\to a}$ et $\sum_{n=0}^{+\infty}$: si $a \in \overline{A}$, si $\forall n \in \mathbb{N}$, $\lim_{x\to a} f_n(x)$ existe et vaut b_n, alors $\sum b_n$ converge. Soit B sa somme. $\lim_{x\to a} f(x)$ existe et vaut B.
3. Conservation du caractère borné : si $\forall n \in \mathbb{N}$, $f_n \in \mathcal{B}(A, \mathbb{K})$, alors $S = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n \in \mathcal{B}(A, \mathbb{K})$.

Pour la suite, $A = I$, intervalle de $\mathbb{R}$.

4. Intervertion des symboles $\int_a^b$ et $\sum_{n=0}^{+\infty}$: si $\forall n \in \mathbb{N}$, $f_n \in \mathcal{C}(I, \mathbb{R})$, si $a, b \in I$, $a < b$,
$$\int_a^b \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t) \right) dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_a^b f_n(t) dt$$
5. Primitivation : soit $\forall n \in \mathbb{N}$, g_n la primitive de f_n sur I qui s'annule en a. Soit G la primitive de S sur I qui s'annule en a. Alors $\sum g_n$ converge uniformément et a pour somme G.
6. Intervertion de la dérivation et du signe $\sum_{n=0}^{+\infty}$: si $\forall n \in \mathbb{N}$, $f_n \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{K})$, si $\sum f_n$ converge simplement sur I et a pour somme S. Si $\sum f_n'$ converge uniformément sur tout segment de I et a pour somme T.
Alors $S \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{K})$, $S' = T$ et $\sum f_n$ converge uniformément
$$\left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n \right)' = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n'$$

Théorème : séries dans une algèbre normée : Dans une algèbre normée $\mathcal{A}$:

1. la série de fonction $\sum f_n$ où $f_n : u \mapsto u^n$ $(u \in \mathcal{A})$ converge absolument sur $\mathcal{B}(0_{\mathcal{A}}, 1)$ donc simplement et normalement et donc uniformément sur toute boule fermée $\mathcal{B}_f(0_{\mathcal{A}}, r)$ avec $0 < r < 1$ et donc sur tout compact $A \subset \mathcal{B}(0_{\mathcal{A}}, 1)$.
2. la série de fonction $\sum \frac{u^n}{n!}$, $u \in \mathcal{A}$ converge absolument et simplement sur A et normalement donc uniformément sur toute boule fermé $\mathcal{B}_f(0_{\mathcal{A}}, R)$, $R \in \mathbb{R}^+$, donc sur tout compact.

8.4 Quelques grand théorèmes d'approximation de fonctions

Définition : subdivision : La subdivision d'un segment $[a, b]$ est un $n+1$-upplet $(n \geqslant 1)$ $(a_0, a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ tel que $a = a_0 < a_1 < \ldots < a_n = b$.

Définition : fonction en escalier : Toute fonction $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ pour laquelle il existe une subdivision $(a_0, \ldots, a_n)$ de $[a, b]$ telle que $\forall i \in [\![0, n-1]\!]$, $f_{|]a_i, a_{i+1}[}$ est constante est une fonction continue en escalier.
On montre que $(\mathcal{E}([a, b], \mathbb{R}), +, \cdot)$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

Définition : fonction continue par morceaux : Toute fonction $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ pour laquelle il existe une subdivision $(a_0, \ldots, a_n)$ de $[a, b]$ telle que $\forall i \in [\![0, n-1]\!]$, $f_{|]a_i, a_{i+1}[}$ est continue et prolongeable par continuité sur $[a_i, a_{i+1}]$ i.e. $\lim\limits_{x \to a_i^+} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to a_i^-} f(x)$ existent dans $\mathbb{R}$.
$(\mathcal{C}_m([a, b], \mathbb{R}), +, \cdot)$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.
Évidemment, $\mathcal{E}([a, b], \mathbb{R}) \subset \mathcal{C}_m([a, b], \mathbb{R})$.

Lemme : $\forall f \in \mathcal{C}_m([a, b], \mathbb{R})$, $\exists g \in \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$ et $h \in \mathcal{E}([a, b], \mathbb{R})$ telles que $f = g + h$.

Théorème 1 : Toute fonction continue par morceaux est limite uniforme d'une suite de fonction en escalier.

Théorème 2 : Toute fonction continue sur un segment est la limite uniforme d'une suite de fonctions affines par morceaux et continues.

Théorème 3 : Toute fonction continue sur un segment est limite uniforme d'une suite de fonctions polynômes.

Chapitre 9

Séries entières

9.1 Définition

Définition : série entière : on appelle sérien entière de la variable complexe (resp. réelle) toute série de fonctions du type $\sum a_n z^n$ (resp. $\sum a_n x^n$) où $(a_n)_n \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ (resp. $(a_n)_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$).

Lemme : lemme d'Abel : Soit $a \in \mathbb{R}^{+\star}$ tel que $(a_n r^n)_n$ soit une suite bornée avec $(a_n)_n \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. Alors $\forall z \in \mathcal{B}(0_{\mathbb{C}}, r)$, la série $\sum a_n z^n$ converge absolument et donc simplement.

Propriété : Soit $(a_n)_n \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. Soient :
- $A = \{r \in \mathbb{R}^+ /\ (a_n r^n)_n \text{ est bornée }\}$
- $B = \{r \in \mathbb{R}^+ /\ (a_n r^n)_n \text{ converge vers } 0\}$

Alors $Sup\ A = Sup\ B$.

Définition : rayon, disque et cercle de convergence : Soit $\sum a_n z^n$ une série entière où $(a_n)_n \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. On appelle :

Rayon de convergence : élément de $\mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$ défini par $R = Sup\{r \in \mathbb{R}^+ \setminus\ (a_n r^n)_n$ est bornée $\} = Sup\{r \in \mathbb{R}^+ /\ a_n r^n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0\}$;

Disque de convergence : le « disque » $\mathcal{D}(0, R) = \{z \in \mathbb{C} /\ |z| < R\}$;

Cercle de convergence : le « cercle » $\mathcal{C}(0, R) = \{z \in \mathbb{C} /\ |z| = R\}$.

Propriété : Les séries $\sum a_n z^n$, $\sum |a_n| z^n$, $\sum M a_n z^n$ où $M \in \mathbb{C}^\star$ ont le même rayon de convergence.

9.2 Convergence de la série entière $\sum a_n z^n$

Théorème : Soit $\sum a_n z^n$ une série entière avec $(a_n)_n \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. Soit R son rayon de convergence.

1. La série entière converge absolument donc simplement sur le disque de convergence $\mathcal{D}(0, R) = \{z \in \mathbb{C} /\ |z| < R\}$;
2. La série entière converge normalement donc uniformément sur tout disque fermé $\mathcal{D}_f(0, R_1)$ avec $0 < R_1 < R$;
3. $\forall z \in \mathbb{C} /\ |z| > R$, la série diverge ;

4. La fonction $S : \left\{ \begin{array}{l} \mathcal{D}(0,R) \to \mathbb{C} \\ z \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n \end{array} \right.$ est continue sur $\mathcal{D}(0,R)$.

Propriété : Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R. Si $\sum a_n R^n$ converge absolument. $\sum a_n z^n$ converge normalement sur $\mathcal{D}_f(0,R)$.

9.3 Propriétés

Propriété : Si $P \in \mathbb{C}[X] \setminus \{0_{\mathbb{C}[X]}\}$, la série entière $\sum P(n) z^n$, a pour rayon de convergence $R = 1$.

Propriétés : Soient $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ de rayons de convergences respectifs R_a et R_b.

1. si $\forall n \in \mathbb{N}$, $|a_n| \leqslant |b_n|$, alors $R_a \geqslant R_b$;
2. si $a_n = O(|b_n|)$ ou $a_n = o(|b_n|)$, alors $R_a \geqslant R_b$;
3. si $a_n \sim b_n$, alors $R_a = R_b$.

Théorème : Soient $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ de rayons de convergences respectifs R_a et R_b. Soient $\sum s_n z^n$ et $\sum p_n z^n$ respectivement somme et produit de Cauchy des deux séries précédentes i.e. $\forall n \in \mathbb{N}$, $s_n = a_n + b_n$ et $p_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_{n-k} b_k$. Soit R_s et R_p les rayons de convergence de ces deux dernières. Alors

1. $R_s \geqslant Min(R_a, R_b)$, $R_p \geqslant Min(R_a, R_b)$;
2. si $R_a \neq R_b$, alors $R_s = Min(R_a, R_b)$;
3. on pose $R = Min(R_a, R_b)$. $\forall z \in \mathcal{D}(0,R)$,
   - $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} s_n z^n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n + \sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n$;
   - $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} p_n z^n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n \times \sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n$.

9.4 Cas des séries réelles

Proposition 1 : intégrales : Soit $\sum a_n t^n$ une série entière réelle (où $(a_n)_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$) de rayon de convergence R et de somme S. Alors $\forall a, b \in]-R, R[$,

$$\int_a^b \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n dt = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \int_a^b t^n dt$$

Proposition 2 : primitive : Soit $\sum a_n t^n$ une série entière réelle de rayon de convergence R et de somme S. Alors les primitives de S sur $]-R, R[$ s'écrivent

$$t \mapsto k + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \frac{t^{n+1}}{n+1} \text{ où } k \in \mathbb{R}$$

Lemme : série « dérivée » : Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R. Soit la série entière $\sum n a_n z^{n-1}$ dite « série dérivée ». Cette série a aussi R pour rayon de convergence.

Théorème : Soit $\sum a_n r^n$ une série entière réelle de rayon de convergence R de somme S. Alors $S \in \mathcal{C}^\infty(]-R,R[,\mathbb{R})$ et $\forall t \in]-R,R[$,

$$S^{(k)}(t) = \sum_{n \geqslant k} \frac{n!}{(n-k)!} a_n t^{n-k}$$

Proposition : coefficients d'une série entière : Soit $\sum a_n t^n$ une série entière réelle de rayon de convergence R et de somme f. Alors

$$a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$$

et ainsi

$$\forall t \in]-R,R[,\ f(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} t^n$$

9.5 Fonctions développables en séries entières

Définition : fonction développable en série entière en 0 : On dit que f est développable en série entière au point 0 s'il existe $R > 0$ et une série entière $\sum a_n z^n$ ($(a_n)_n \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$) tels que :

- f est définie sur $\mathcal{D}(0,R)$ et
- $\forall z \in \mathcal{D}(0,R),\ f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$.

Définition : fonction développable en série entière en $t_0 \in \mathbb{R}$: Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et $t_0 \in I$ avec I un intervalle de $\mathbb{R}$. Soit $g : \left\{ \begin{array}{l} J \to \mathbb{R} \\ u \mapsto g(u) = f(t_0 + u) \end{array} \right.$ avec J l'intervalle I translaté de $-t_0$.
f est développable en série entière en t_0 si g est développable en série entière en 0.
Ou encore, s'il existe $(a_n)_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et $R > 0$ tels que $\forall t \in]t_0 - R, R + t_0[,\ f(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (t - t_0)^n$.

Propriétés : Soit f une fonction développable en série entière en 0 et de rayon de convergence R :

1. il y a unicité du développement en série entière ;
2. si f est paire (resp. impaire), il n'y aura que des monômes d'ordre pair (resp. impair) dans le développement en série entière ;
3. si g est aussi une fonction développable en série entière en 0 et qui admet R' comme rayon de convergence, $f + g$ et $f \times g$ sont développable en série entière en 0 de rayon de convergence $\geqslant Min(R, R')$ avec

$$(f+g)(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} (a_n + b_n) t^n \qquad (f \times g)(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^{n} (a_{n-k} b_k) t^n$$

αf admet aussi un développement en série entière de rayon de convergence R si $\alpha \neq 0$ avec

$$(\alpha f)(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} (\alpha a_n) t^n$$

4. f' est développable en série entière et admet R comme rayon de convergence et

$$\forall t \in]-R, R[, \ f'(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} n a_n t^{n-1}$$

5. si F est une primitive de f, F est aussi développable en série entière de même rayon de convergence R et

$$\forall t \in]-R, R[, \ F(t) = F(0) + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \frac{t^{n+1}}{n+1}$$

6. $f \in \mathcal{C}^\infty(]-R, R[, \mathbb{R})$.

Développements en séries entières usuels :
De rayon de convergence $R = +\infty$, $\forall z \in \mathbb{C}$, $\forall t \in \mathbb{R}$:

$$\exp(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$$

$$\cos t = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{t^{2n}}{(2n)!} \qquad \sin t = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{t^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$\operatorname{ch} t = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^{2n}}{(2n)!} \qquad \operatorname{sh} t = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

De rayon de convergence $R = 1$, $\forall t \in]-1, 1[$:

$$\frac{1}{1-t} = \sum_{n=0}^{+\infty} t^n \qquad \frac{1}{1+t} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n t^n$$

$$-\ln(1-t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{t^n}{n} \qquad \ln(1+t) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{t^n}{n}$$

$$\operatorname{Argth} t = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^{2n+1}}{2n+1} \qquad \operatorname{Arctan} t \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{t^{2n+1}}{2n+1}$$

De rayon de convergence $R = 1$, $\forall t \in]-1, 1[$, $\alpha \in \mathbb{R}$:

$$(1+t)^\alpha = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!} t^n$$

$$\operatorname{Arcsin} t = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1 \times 3 \times \ldots \times (2n-1)}{2 \times 4 \times \ldots \times 2n} \frac{t^{2n+1}}{(2n+1)} \qquad \operatorname{Argth} t = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{1 \times 3 \times \ldots \times (2n-1)}{2 \times 4 \times \ldots \times 2n} \frac{t^{2n+1}}{(2n+1)}$$

Chapitre 10

Espaces préhilbertiens réels, espaces hermitiens

10.1 Formes bilinéaires et formes quadratiques

$\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Définition : forme bilinéaire symétrique : Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé. Soit $\Phi : E \times E \to \mathbb{K}$. Φ est une forme bilinéaire si :

1. $\forall u \in E$, $\Phi(u, .) : \left\{ \begin{array}{l} E \to \mathbb{K} \\ v \mapsto \Phi(u, v) \end{array} \right.$ est linéaire ;
2. $\forall v \in E$, $\Phi(., v) : \left\{ \begin{array}{l} E \to \mathbb{K} \\ u \mapsto \Phi(u, v) \end{array} \right.$ est linéaire.

Si de plus, $\forall (u, v) \in E \times E$, $\Phi(u, v) = \Phi(v, u)$, Φ est dite symétrique.

Structure : Soit $\mathcal{BL}(E) = \{\Phi : E \times E \to \mathbb{K}$ tel que Φ bilinéaire$\}$ l'ensemble des formes bilinéaires.
Soit $\mathcal{BL}_s(E) = \{\Phi \in \mathcal{BL}(E)$ tel que Φ symétrique$\}$ l'ensemble des formes bilinéaires symétrique.
$(\mathcal{BL}(E), +, \cdot)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.
$(\mathcal{BL}_s(E), +, \cdot)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Représentation polynomiale en dimension finie : Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie de base $(e_1, \ldots, e_n) = \mathcal{B}$. Soit $(x, y) \in E \times E$. Ainsi, $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$ et $y = \sum_{j=1}^{n} y_j e_j$.
Si Φ est une forme bilinéaire et $\forall (i, j) \in [\![1, n]\!]^2$, $\alpha_{i,j} = \Phi(e_i, e_j)$,

$$\Phi(x, y) = \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \alpha_{i,j} x_i y_j$$

Définition : Soit $\Phi \in \mathcal{BL}(E)$ où E est de dimension finie, de base $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$. Soit $A = (\Phi(e_i, e_j))_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
A est appelé la matrice de la forme bilinéaire Φ dans la base $\mathcal{B}$, et noté $A = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(\Phi)$.
Soit $(x, y) \in E \times E$. Ainsi ; $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$ et $y = \sum_{j=1}^{n} y_j e_j$.

$$(\Phi(x, y)) = {}^tX \cdot A \cdot Y$$

Structure : $\Psi : \left\{ \begin{array}{l} \mathcal{BL}(E) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \\ \varphi \mapsto \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(\varphi) \end{array} \right.$ est un isomorphisme.

Conséquence : Soit $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Si $\forall X, Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}),\ {}^tX \cdot A \cdot Y = {}^tX \cdot B \cdot Y$ alors nécéssairement $A = B$.

Effet d'un changement de base : Soit $\mathcal{B}'$ une autre base de E. Soit $P = Pass(\mathcal{B}, \mathcal{B}')$. Soit $x, y \in E$ dont les vecteurs colonnes associés (vecteurs de leur coordonées) relativement aux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ sont X, X' et Y, Y'.

$${}^tX \cdot A \cdot Y = {}^tX' \cdot \big({}^tP \cdot A \cdot P \big) \cdot Y'$$

$$B = {}^tP \cdot A \cdot P$$

Définition : Deux matrices A et $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ sont dites congruentes s'il existe $P \in GL_n(\mathbb{K})$ telle que $B = {}^tP \cdot A \cdot P$.

Proposition : Soit $\Phi \in \mathcal{BL}(E)$. Soit $A \in \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(\Phi) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ où $\mathcal{B}$ est une base de E.

$$[\Phi \text{ est symétrique}] \Leftrightarrow [A \text{ est symétrique}]$$

Complément sur les matrices : On note $\mathcal{S}_n(\mathbb{K}) = \big\{ M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) /\ {}^tM = M \big\}$ l'ensemble des matrices symétriques. C'est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et est de dimension $\dfrac{n(n+1)}{2}$.
On note $\mathcal{A}_n(\mathbb{K}) = \big\{ M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) /\ {}^tM = -M \big\}$ l'ensemble des matrices antisymétriques. C'est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et est de dimension $\dfrac{n(n-1)}{2}$.

$$\mathcal{M}_n(\mathbb{K}) = \mathcal{S}_n(\mathbb{K}) \oplus \mathcal{A}_n(\mathbb{K})$$

Forme polynomiale particulière aux formes bilinéaires symétriques : Soit φ une forme bilinéaire et $x, y \in E$ avec $x = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i e_i$ et $y = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} y_j e_j$, $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ étant une base de E. Si φ est symétrique,

$$\varphi(x, y) = x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{i,i} x_i y_i + \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} \alpha_{i,j} (x_i y_j + x_j y_i)$$

Ainsi, $\dim \mathcal{BL}_s(E) = \dfrac{n(n+1)}{2}$ avec $n = \dim E$.

Définition : forme quadratique : Soit E un espace vectoriel. Soit $q : E \to \mathbb{K}$. On dit que q est une forme quadratique s'il existe $\varphi \in \mathcal{BL}_s(E)$ telle que $\forall u \in E,\ q(u) = \varphi(u, u)$.
On dira que φ est la forme polaire de q.

Écriture polynomiale d'une forme quadratique : Soit q une forme quadratique et $x, y \in E$ avec $x = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i e_i$ et $y = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} y_j e_j$, $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ étant une base de E.

$$q(u) = \varphi(u, u) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{i,i} x_i^2 + 2 \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} \alpha_{i,j} x_i y_j$$

Forme quadratique et matrice : La matrice $A = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(\varphi) = (\alpha_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ sera aussi appelée matrice de la forme quadratique. C'est donc la matrice de sa forme polaire. On a alors $\forall x \in E$ tel que $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$, si $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$,

$$\big(q\,(x)\,\big) = {}^tX \cdot A \cdot X$$

Strucuture : L'ensemble des formes quadratiques est noté $Q(E)$.
$(Q(E), +, \cdot)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Identité de polarisation :

$$(x \mid y) = \frac{1}{2}\left(\|x+y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2\right)$$

$$(x \mid y) = \frac{1}{2}\left(\|x\|^2 + \|y\|^2 - \|x-y\|^2\right)$$

$$(x \mid y) = \frac{1}{4}\left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\right)$$

Théorème : Soit q une forme quadratique sur E et φ sa forme polaire. Alors $\forall x, y \in E$,

$$\varphi(x,y) = \frac{1}{2}\left(q(x+y) - q(x) - q(y)\right)$$

$$\varphi(x,y) = \frac{1}{2}\left(q(x) + q(y) - q(x-y)\right)$$

$$\varphi(x,y) = \frac{1}{4}\left(q(x+y) - q(x-y)\right)$$

Définition : forme biliénaire symétriques définies positives ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$) : Une forme bilinéaire symétrique φ sur un $\mathbb{R}$-espace vectoriel (resp. une forme quadratique q sur E) est dite :

- positive si $\forall x \in E,\ \varphi(x,x) \geqslant 0$ (resp. $q(x) \geqslant 0$) ;
- définie positive si de plus, $\forall x \in E, \varphi(x,x) = 0 \Rightarrow x = 0_E$ (resp. $q(x) = 0 \Rightarrow x = 0_E$).

Théorème : inégalité de Cauchy-Schwarz : Soit φ une forme bilinéaire symétrique positive. Soit q la forme quadratique associée. Alors

$$\forall x, y \in E,\ \varphi(x,y)^2 \leqslant \varphi(x,x) \times \varphi(y,y) \text{ i.e. } \varphi(x,y)^2 \leqslant q(x) \times q(y)$$

Si de plus φ est définie positive, alors l'égalité a lieu si et seulement si les vecteurs x et y sont colinéaires.

10.2 Espaces préhilbertiens réels, produit scalaire

Maintenant, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$.

Définitions : Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.
- On appelle produit scalaire toute forme bilinéaire symétrique sur E définie postive ;
- lorsque E est muni d'un produit scalaire φ, le couple (E, φ) (ou plus simplement E) est dit préhilbertien réel ;
- si de plus E est de dimension finie, il est dit euclidien.

Notation : à partir de maintenant, on préfère à la notation préfixe $\varphi(x, y)$ la notation infixe $(x \mid y)$ (on trouve aussi $< x, y >$). On parle alors du produit $(. \mid .)$ (pour φ).

Définition : norme euclidienne : $\forall x \in E$, on pose $\|x\|_2 = \sqrt{(x \mid x)}$

Propriétés :
- $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2(x \mid y)$
- égalités de polarisations :
  1. $(x \mid y) = \frac{1}{2}\left(\|x + y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2\right)$
  2. $(x \mid y) = \frac{1}{2}\left(\|x\|^2 + \|y\|^2 - \|x - y\|^2\right)$
  3. $(x \mid y) = \frac{1}{4}\left(\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2\right)$

Propriété du parallèlogramme :

$$\forall x, y \in E,\ \|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$$

Théorème : inégalité de Cauchy-Schwarz : Soit $(E, (. \mid .))$ un espace préhilbertien réel. Soit $\|.\|_2$ la norme euclidienne associée.
1. $\forall (x, y) \in E^2,\ |(x \mid y)| \leqslant \|x\| \times \|y\|$
2. $\forall (x, y) \in E^2,\ \big[|(x \mid y)| = \|x\| \times \|y\|\big] \Leftrightarrow (x, y)$ est libre.

Théorème : inégalité et égalité de Minkowski (E espace préhilbertien réel) :

$$\forall x, y \in E,\ \|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$$

$$\big[\|x + y\| = \|x\| + \|y\|\big] \Leftrightarrow \big[x = 0_E \text{ ou } \exists \lambda \in \mathbb{R}^+ /\ y = \lambda x\big]$$

10.3 Orthogonalité

Définitions : Soit E un espace vectoriel préhilbertien réel.
- vecteurs orthogonaux : $x, y \in E /\ (x \mid y) = 0$;
- famille orthogonale $(e_i)_{i \in I} \in E^I /\ \forall i, j \in I /\ i \neq j,\ (e_i \mid e_j) = 0$;
- famille orthogonale $(e_i)_{i \in I} \in E^I /\ \forall i, j \in I,\ (e_i \mid e_j) = \delta_{i,j}$;
- sous-espaces vectoriels orthogonaux F et G tels que $\forall (x, y) \in F \times G$, $(x \mid y) = 0$.

Proposition 1 : Toute famille orthogonale de vecteurs non nuls est libre.

Corollaires :
- Toute famille orthonormale est libre ;
- toute famille orthonormale et génératrice est une base ;
- si $\dim E = n$, toute famille orthonormale de n vecteurs est une base.

Proposition 2 : théorème de Pythagore : Soit E un espace préhilbertien réel. Si $(x_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ est une famille orthogonale de vecteurs de E, alors

$$\left\|\sum_{i=1}^{n} x_i\right\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \|x_i\|^2$$

Définition : orthogonale d'un sous-espace vectoriel : On appelle orthogonal d'un sous-espace vectoriel F de E le sous-espace vectoriel noté $F^\perp$ et défini par :

$$F^\perp = \{x \in E / \ \forall y \in F, \ (x \mid y) = 0\}$$

Propriétés :

1. $F^\perp$ est un sous-espace vectoriel de E.
2. $\{0_E\}^\perp = E \qquad E^\perp = \{0_E\}$.
3. Si G est un sous-espace vectoriel orthogonal à F, alors $G \subset F^\perp$.
4. $F^\perp$ est, au sens de l'inclusion, le plus grand sous-espace vectoriel orthogonal à F.
5. Si $F_1 \subset F_2$, alors $F_1^\perp \supset F_2^\perp$.
6. $F \subset \left(F^\perp\right)^\perp$.
7. La somme $F + F^\perp$ est directe.

Proposition : S'il existe une sous-espace vectoriel G orthogonal à F tel que $G \oplus F = E$, nécessairement $G = F^\perp$.
$G = F^\perp$ est appelé le supplémentaire orthogonal de F.

Proposition : projection orthogonale : Soit F un sous-espace vectoriel de E tel que $F \oplus F^\perp = E$. On appelle projection (projecteur) orthogonale de E sur F la projection de E sur F de direction $F^\perp$.

Projection sur une droite : Soit $a \in E, \ a \neq 0_E$ et $F = Vect(a)$. $\forall x \in E$, la projection de x sur F est :

$$p(x) = (a \mid x) \cdot a \text{ si } a \text{ est unitaire}$$

$$p(x) = \frac{(a \mid x)}{\|a\|^2} \cdot a \text{ sinon}$$

Projection sur un sous-espace vecotiel : Soit $F = Vect(e_1, \dots, e_p)$ où $(e_j)_{j\in[\![1,p]\!]}$ est orthogonale de vecteurs non nuls. $\forall x \in E$, la projection de x sur F est :

$$p(x) = \sum_{i=1}^{p} (e_i \mid x) \cdot e_i \text{ si } (e_1, \dots, e_p) \text{ est orthonormée.}$$

$$p(x) = \sum_{i=1}^{p} \frac{(e_i \mid x)}{\|e_i\|^2} \cdot e_i \text{ si } (e_1, \dots, e_p) \text{ est orthogonale de vecteurs non nuls.}$$

Théorème : Si F possède un supplémentaire orthogonal (i.e. si $F \oplus F^\perp = E$) alors :

$$d(x, F) = \|x - p_F(x)\| = d(x, p_F(x))$$

où $p_F(x)$ est le projeté orthogonal de x sur F.

Définition : sommation de sous-espaces vectoriels orthogonaux : On appelle famille orthogonale $(F_i)_{i\in I}$ de sous-espaces vectoriels toute famille pour la quelle

$$\forall (i,j)\in I^2,\ \text{ si } i\neq j,\ F_i\perp F_j$$

Théroème : Si $(F_i)_{i\in[\![1,b]\!]}$ est une famille orthogonale de sous-espaces vectoriels, alors la somme $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} F_i$ est une somme directe.

Théorème : procédé d'orthogonalisation de Schmidt : Soit $(u_1,\dots,u_p)$ une famille libre d'un espace préhilbertien E.
Il existe une et une seule famille orthonormée $(e_1,\dots,e_p)$ telle que :

1. $\forall i\in[\![1,p]\!]$, $Vect(e_1,\dots,e_i)=Vect(u_1,\dots,u_i)$;
2. $\forall i\in[\![1,p]\!]$, $(e_i\mid u_i)>0$.

Algorithme de construction :
on pose $\displaystyle f_k=u_k-\sum_{i=1}^{k-1}(e_i\mid u_k)e_i=u_k-p_{k-1}(u_k)$ et $\displaystyle e_k=\frac{f_k}{\|f_k\|}$.

Théorème : Soit E un espace préhilbertien réel de dimension quelconque. Soit F un sous-espace vectoriel de E de dimension finie de base $(e_i)_{1\leqslant i\leqslant p}$ orthonormée. Alors :

1. $F\oplus F^{\perp}$. Autrement dit, F possède un supplémentaire orthogonal.
   Et par suite
2. $(F^{\perp})^{\perp}=F$;
3. on peut définir la projection orthogonale p_F de E sur F et $\displaystyle p_F(x)=\sum_{i=1}^{p}(e_i\mid x)e_i$;
4. $\forall x\in E,\ d(x,F)=d(x,p_F(x))=\|x-p_F(x)\|$.

Théorème : inégalité de Bessel : Soit $(e_1,\dots,e_p)$ une famille orthonormale d'un espace vectoriel préhilbertien réel, alors :

$$\forall x\in E, \sum_{i=1}^{p}(e_i\mid x)^2\leqslant\|x\|^2$$

Complément :

$$\|x\|^2=\sum_{i=1}^{p}(e_i\mid x)^2+d(x,F)^2 \text{ avec } F=Vect(e_1,\dots,e_p)$$

10.4 Espace euclidien

Définition : On appelle espace euclidien tout espace préhilbertien réel de dimension finie.

Théorème 1 : Tout espace euclidien possède une base orthonormée.

Théorème 2 : Toute famille orthonormale peut-être complétée en une base orthonormée.

Isomorphisme entre E et $\mathbb{R}^n$: Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n. E est isomorphe à $\mathbb{R}^n$ via :

$$\varphi : \begin{cases} E \longrightarrow \mathbb{K}^n \\ x = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i e_i \mapsto (x_1, \ldots, x_n) \end{cases}$$

φ dépend de la base $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ de E choisie.

Isomorphisme entre E et son dual $E^\star$: Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n et $E^\star = \mathcal{L}(E, \mathbb{R})$. E est isomorphe à son dual via :

$$\Psi : \begin{cases} E \longrightarrow E^\star \\ a = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i \mapsto \varphi : \begin{cases} E \longrightarrow \mathbb{R} \\ x = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i e_i \mapsto \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i \end{cases} \end{cases}$$

Autrement dit :

$$\Psi : \begin{cases} E \to E^\star \\ a \mapsto (a \mid .) \end{cases}$$

Expression analytique en base orthonormée du produit scalaire : Soit $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base orthonormée de E un espace vectoriel euclidien. $x = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i e_i$ et $y = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} y_i e_i$.

$$\forall i \in [\![1, n]\!],\ x_i = (e_i \mid x)$$

$$(x \mid y) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

$$\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$$

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ et $M = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f) = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$

$$\forall (i,j) \in [\![1, n]\!]^2,\ a_{i,j} = (e_i \mid f(e_j))$$

$$tr(f) = \sum_{i=1}^{n} (e_i \mid f(e_i))$$

10.5 Espaces préhilbertiens complexes

Définition : forme semi-linéaire : Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel et $\varphi : E \to \mathbb{C}$. On dit que φ est une forme semi-linéaire si :

1. $\forall (x,y) \in E^2,\ \varphi(x+y) = \varphi(x) + \varphi(y)$;
2. $\forall x \in E,\ \forall \alpha \in \mathbb{C},\ \varphi(\alpha x) = \overline{\alpha}\varphi(x)$.

Définition : forme sesquilinéaire : Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel et $\Phi : E \times E \to \mathbb{C}$. On dit que Φ est sesquilinéaire si :

- $\forall x \in E,\ \Phi(x, .)$ est linéaire ;
- $\forall y \in E,\ \Phi(., y)$ est semi-linéaire.

Définition : matrice d'une forme sesquilinéaire : La matrice d'une forme sesquilinéaire Φ dans une base $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ donnée est :

$$A = (\Phi(e_i, e_j))_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$$

$$(\Phi(x, y)) = {}^t\overline{X} \cdot A \cdot Y$$

Définition : forme sesquilinéaire hermitienne : Une forme sesquilinéaire Φ est dite hermitienne si :

$$\forall (x, y) \in E \times E,\ \Phi(y, x) = \overline{\Phi(x, y)}$$

Définition : matrice adjointe : Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. La matrice ${}^t\overline{M}$ est appelée la matrice adjointe de M et est notée $M^\star$.

Définition : matrice hermitienne : Une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est dite hermitienne si ${}^tM = \overline{M}$ (ou encore si $M = M^\star$).

Proposition : Soit Φ une forme sesquilinéaire sur un espace vectoriel de base $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$. Soit $M = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(\Phi)$.

$$\Phi \text{ hermitienne} \Leftrightarrow M \text{ hermitienne}$$

Propriété : préliminaire : Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

$$\left[\forall X, Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C}),\ {}^t\overline{X} \cdot A \cdot Y = {}^t\overline{X} \cdot B \cdot Y\right] \Leftrightarrow [A = B]$$

Propriété : effet d'un changement de base : Soit Φ une forme sesquilinéaire et deux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$. $M = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(\Phi)$, $M' = \mathcal{M}_{\mathcal{B}'}(\Phi)$, $P = Pass(\mathcal{B}, \mathcal{B}')$.

$$M' = {}^t\overline{P} \cdot M \cdot P$$

$$M' = P^\star \cdot M \cdot P$$

Définition : positivité : Soit Φ une forme sesquilinéaire hermitienne sur $\mathbb{C}$-espace vectoriel E.

1. Φ est dite positive si $\forall x \in E,\ \Phi(x, x) \geqslant 0$;
2. si de plus $\forall x \in E,\ [\Phi(x, x) = 0] \Rightarrow [x = 0_E]$, elle est dite définie positive.

Définition : (On identifie $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ avec $\mathbb{C}^n$) Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice hermitienne (resp. $M \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$). M est dite positive si :

$$\forall X \in \mathbb{C}^n \text{ (resp. } \mathbb{R}^n),\ {}^t\overline{X} \cdot M \cdot X \geqslant 0 \text{ (resp. } {}^tX \cdot M \cdot X \geqslant 0)$$

M est dite définie positive si

$$\forall X \in \mathbb{C}^n \setminus \{0_{\mathbb{C}^n}\} \text{ (resp. } \forall X \in \mathbb{R}^n \setminus \{0_{\mathbb{R}^n}\}),\ {}^t\overline{X} \cdot M \cdot X > 0 \text{ (resp. } {}^tX \cdot M \cdot X > 0)$$

Définitions : Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel :

1. On appelle produit scalaire (complexe) sur E toute forme sesquilinéaire hermitienne définie positive.
2. (E, Φ) est dit préhilbertien complexe s'il est muni d'un produit scalaire Φ.
3. Un espace préhilbertien complexe de dimension finie est dit hermitien.
4. On note alors $\|x\| = \sqrt{\Phi(x, x)}$ (norme hermtienne associée).

Proposition : inégalité de Cauchy-Scwharz : Soit Φ une forme sesquilinéaire hermitienne positive sur un $\mathbb{C}$-espace vectoriel E. Alors :

$$\forall x, y \in E,\ |\Phi(x,y)|^2 \leqslant \Phi(x,x) \times \Phi(y,y)$$

Cas d'égalité : si Φ est bien définie positive,

$$|\Phi(x,y)|^2 = \Phi(x,x) \times \Phi(y,y) \text{ si et seulement si } x \text{ et } y \text{ sont colinéaires.}$$

Calcul algébrique utile :

$$\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2Re((x \mid y))$$

Proposition : norme : L'application $N_2 : \left\{ \begin{array}{l} E \to \mathbb{R}^+ \\ x \mapsto \|x\|^2 \end{array} \right.$ est bien une norme.

Proposition : égalité du parallélogramme :

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right)$$

Polarisation

$$Re((x \mid y)) = \frac{1}{2}\left(\|x+y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2\right)$$
$$Im((x \mid y)) = \frac{1}{2}\left(\|ix+y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2\right)$$
$$(x \mid y) = Re((x \mid y)) + iIm((x \mid y))$$

Dualité en dimension finie : Un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie n ($\dim E = \dim E^\star = n$) est ismorphe à son dual via :

$$\Psi : \left\{ \begin{array}{l} E \to E^\star \\ a \mapsto (\overline{a} \mid .) \end{array} \right.$$

Proposition : orthogonalité : Peu de changement par rapport au cas réel.

- Si E est hermitien et si $(e_1, \ldots, e_n)$ est une base orthonormée de E,

$$x = \sum_{i=1}^{n} ((e_i \mid x)e_i \text{ i.e. } x_i = (e_i \mid x) \text{ et non pas } (x \mid e_i)$$

- $(x \mid y) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \overline{x_i} y_i$
- $\|x\| = \sqrt{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2}$

Chapitre 11

Endomorphismes d'un espace vectoriel euclidien

Dans tout le chapitre, E désigne un espace vectoriel euclidien.

11.1 Adjoint d'un endomorphisme

Propriété : $\forall \varphi \in E^\star = \mathcal{L}(E, \mathbb{R}), \exists! a \in E$ tel que $\varphi = (a \mid .)$ ou encore $\forall x \in E,\ \varphi(x) = (a \mid x)$.

Propriété : $\forall (a, b) \in E^2$, si $\forall y \in E,\ (a \mid y) = (b \mid y)$, alors $a = b$.

Proposition : Soit $u \in \mathcal{L}(E)$.

$$\forall x \in E,\ \exists! \widetilde{x} \in E \text{ tel que } \forall y \in E,\ (x \mid u(y)) = (\widetilde{x} \mid y).$$

Définition : adjoint d'un endomorphisme : On appelle (endomorphisme) adjoint de l'endomorphisme u l'application $u^\star$ définie par : $\forall x \in E,\ u^\star(x)$ est l'unique élément de E tel que $\forall y \in E,\ (u^\star(x) \mid y) = (x \mid u(y))$. $u^\star \in \mathcal{L}(E)$.

Propriétés : propriétés algébriques de $u^\star$: Soit $u \in \mathcal{L}(E)$.

1. $(u^\star)^\star = u$
2. $(u + v)^\star = u^\star + v^\star$
3. $(\alpha u)^\star = \alpha u^\star$
4. $(Id_E)^\star = Id_E$
5. $(u \circ v)^\star = v^\star \circ u^\star$
6. Si $u \in GL(E)$, alors $u^\star \in GL(E)$ et $(u^\star)^{-1} = (u^{-1})^\star$.
7. $0^\star = 0$

Proposition : Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. $\Phi : \begin{cases} \mathcal{L}(E) \to \mathcal{L}(E) \\ u \mapsto u^\star \end{cases}$ est un automorphisme.

Proposition : matrice de $u^\star$ dans une base orthonormée : Soit $\mathcal{B}$ une base orthonormée, soit $u \in \mathcal{L}(E)$.

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(u^\star) = {}^t\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(u)$$

Corollaire :

$$rg(u^\star) = rg(u) \qquad tr(u^\star) = tr(u) \qquad \det(u^\star) = det(u)$$

Conséquence :

$$\chi_{u^\star} = \chi_u \qquad Sp(u^\star) = Sp(u) \qquad \mu_{u^\star} = \mu_u$$

Proposition : noyau et image : Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et $u^\star$ son adjoint. Alors :

$$Ker(u^\star) = Im(u)^\perp \qquad Im(u^\star) = Ker(u)^\perp$$

Proposition : sous-espaces stables : Soient $u \in \mathcal{L}(E)$ et $u^\star$ son adjoint. Soit F un sous-espace vectoriel de E. Alors

$$[F \text{ est stable par } u] \Leftrightarrow \left[F^\perp \text{ est stable par } u^\star\right]$$

Proposition : normes subordonnées : Soit $u \in \mathcal{L}(E)$.

$$|||u||| = |||u^\star||| \qquad |||u^\star \circ u||| = |||u|||^2$$

11.2 Endomorphisme autoadjoint (ou symétrique)

Définition : endomorphisme autoadjoints : Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. u est dit autoadjoint (ou symétrique) s'il est égal à son adjoint, autrement dit si $u^\star = u$.

Proposition : matrice d'un endomorphisme autoadjoint : Soit $\mathcal{B}$ une base orthonormée. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et soit $A = \mathcal{M}_\mathcal{B}(u)$. u est autoadjoint si et seulement si A est symétrique.

Définition / strucure de $\mathcal{S}(E)$: On note $\mathcal{S}(E) = \{u \in \mathcal{L}(E) \text{ tel que } u^\star = u\}$. $(\mathcal{S}(E), +, \cdot)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$ isomorphe à $(\mathcal{S}_n(E), +, \times)$.

Propositon : formes bilinéaire symétriques et endomorphisme symétrique : Si E est un espace vectoriel euclidien, $\mathcal{B}$ une base orthonormée de E, $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $\mathcal{M}_\mathcal{B}(u) = A$, $\varphi \in \mathcal{BL}_s(E)$ telle que $\mathcal{M}_\mathcal{B}(\varphi) = A$.
Alors, $\forall (x, y) \in E^2,\ \varphi(x, y) = (x \mid u(y))$.

11.3 Automorphismes orthogonaux (rappels, compléments)

Définitions : Les cinq définitions suivantes des automorphismes orthogonaux sont équivalentes :

1. $\forall u \in \mathcal{L}(E),\ \forall (x, y) \in E^2,\ (u(x) \mid u(y)) = (x \mid y)$ i.e. u conserve le produit scalaire.
2. $\forall u \in \mathcal{L}(E),\ \forall x \in E,\ \|u(x)\| = \|x\|$ i.e. u conserve la norme ;
3. soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et l'image d'une base orthonormée est une base orthonormée ;
4. $\forall (x, y) \in E^2,\ \|u(x) - u(y)\| = \|x - y\|$ et $u(0_E) = 0_E$;
5. $u \in \mathcal{L}(E)$ et $u^\star \circ u = Id_E$.

Définition / structure : $(O(E), \circ)$ est appelé groupe orthogonal de E avec $O(E) = \{u \in \mathcal{L}(E) \text{ tel que } u^\star \circ u = Id_E\}$.
$(O(n), \circ)$ est appelé groupe orthogonal d'ordre n avec $O(n) = \{M \in GL_n(\mathbb{R}) \text{ tel que } {}^tM \cdot M = I_n\}$.

Proposition : Soit $u \in O(E)$ (resp. $A \in O(n)$) alors $\det u \in \{-1, 1\}$ (resp. $\det A \in \{-1, 1\}$).

Définition : On appelle $SO(E) = \{u \in O(E) \text{ tel que } \det u = 1\}$ le groupe spécial orthogonal de E.
On appelle $SO(n) = \{A \in O(n) \text{ tel que } \det A = 1\}$ le groupe spécial orthogonal d'ordre n.

Propriété : Soit $\mathcal{B}$ orthonormale, $\mathcal{B}'$ une autre base de E.

$$[\mathcal{B}' \text{ orthonormale}] \Leftrightarrow [Pass(\mathcal{B}, \mathcal{B}') \in O(n)]$$

11.4 Réduction des endomorphsismes symétriques, des matrices symétriques

Lemme : Soit $u \in \mathcal{S}(E)$ (resp. $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$) où E un espace vectoriel non réduit au vecteur nul. Alors, le polynôme caractéristique de u est scindé dans $\mathbb{R}$. Ainsi, $Sp(u) \neq \varnothing$ (resp. $Sp(A) \neq \varnothing$) et il existe des vecteurs propres.

Lemme : Les sous-espaces propres de $u \in \mathcal{S}(E)$ (resp. $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$) sont orthgonaux.

Théorème spectrale 1 : (version endomorphisme) : Soit $u \in \mathcal{S}(E)$ (i.e. u un endomorphisme symétrique ou autoadjoint). Alors u est diagonalisable dans une base orthonormée et ses sous-espaces propres sont orthogonaux.

Théorème spectrale 2 : (version matricielle) : Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}),\ n \in \mathbb{N}^\star$, alors $\exists \Delta \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que Δ diagonale, $\exists P \in O(n)$ telle que

$$\Delta = P^{-1} \cdot A \cdot P = {}^tP \cdot A \cdot P$$

Théorème spectrale 3 : (version bilinéaire) : Soit $\varphi \in \mathcal{BL}_s(E)$ (resp. q une forme quadratique), alors il existe une base orthonormée de E dans laquelle la matrice de φ (resp. de q) est diagonale.

Définition : On dit que $\varphi \in \mathcal{BL}_s(E)$ (resp. $q \in \mathcal{Q}(E)$) est non dégénéré si $rg(\varphi) = n$ (resp. $rg(q) = n$).

Propriété :

$$[\varphi \text{ non dégénéré}] \Leftrightarrow [0 \notin Sp(A)]$$

Théorème : (pour $\mathcal{S}(E)$, formulation identique pour $\mathcal{BL}_s(E)$ et $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$) : Soit $u \in \mathcal{S}(E)$.

$$u \in \mathcal{S}^+(E) \Leftrightarrow \forall \lambda \in Sp(u),\ \lambda \geqslant 0$$

$$u \in \mathcal{S}^{++}(E) \Leftrightarrow \forall \lambda \in Sp(u),\ \lambda > 0$$

Théorème : Soit $u \in \mathcal{S}^+(E)$, alors

$$|||u||| = \underset{\|x\|\leqslant 1}{Sup}\,(x \mid u(x)) = \underset{\|x\|=1}{Sup}\,(x \mid u(x)) = Max\,(Sp(u))$$

11.5 Application aux coniques

Définition : conique : Dans le plan euclidien d'un repère $\mathscr{R}_0 = (0, \vec{e_1}, \vec{e_2})$ orthonormée, on appekke conique toute courbe d'équation :

$$P(x, y) = 0$$

dans le repère $\mathscr{R}_0$ où $P \in \mathbb{R}[X, Y]$ tel que P est de dégré 2.
Autrement dit, $P(x, y) = ax^2 + 2bxy + cy^2 + dx + ey - k = 0$, $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$. On voit apparaître la forme quadratique $q((x, y)) = ax^2 + 2bxy + cy^2$ sur $\mathbb{R}^2$ de matrice $M = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$.

Étude bilan : Soit $\det M = ac - b^2$. $M \in \mathcal{S}_2(\mathbb{R})$. M est diagonalisable en $\Delta = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$.
$\det M = \lambda\mu$. Soit $\mathcal{B} = (\vec{i}, \vec{j})$ une base orthonormée de vecteurs propres.
Le cas $\lambda = \mu$ n'arrive que si $(a, b, c) \neq (a, 0, a)$: il s'agit d'un cercle, d'un singleton ou de $\varnothing$.

	cas intéressant	cas moins intéressant
$\det M > 0$	ellipse	$\{\Omega\}$, $\varnothing$
$\det M < 0$	hyperbole	$D_1 \cup D_2$ (sécantes)
$\det M = 0$	parabole	$\varnothing$, $D_1 \cap D_2$ (parallèles)

- Si $\det M \neq 0$, la conique a un centre de symétrie $\Omega(x_0, y_0)$ que l'on obtient en résolvant le système
$$\begin{cases} \dfrac{\partial P}{\partial x}(x, y) = 0 \\ \dfrac{\partial P}{\partial y}(x, y) = 0 \end{cases}$$
C'est une ellipse ou une hyperbole (ou cas moins intéressants).
Les axes (de symétries) de la conique $\mathcal{C}$ sont alors portés par les vecteurs propres respectifs.
- Si $\det M = 0$ la conique est une parabole (ou cas moins intéressant).
L'axe de symétrie de la parabole est dirigé par $\vec{i} \in E_0$.

11.6 Application aux quadriques

Définition : quadrique : Dans l'espace affine $\mathcal{E}_3$ de dimension 3, on appelle quadrique toute surface d'équation :

$$P(x, y, z) = 0$$

dans un repère $(0, \vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ orthonormé où $P \in \mathbb{R}[X, Y, Z]$ tel que P est de degré 2.
Autrement dit, $P(x, y, z) = ax^2 + by^2 + cz^2 + 2dxy + 2exz + 2fyz + gx + hy + iz - h = 0$ avec $(a, b, c, e, d, f) \neq (0, 0, 0, 0, 0, 0)$

Analyse rapide : Soit $M = \begin{pmatrix} a & d & e \\ d & b & f \\ e & f & c \end{pmatrix} = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(q)$ où $\mathcal{B} = (\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$.
Il faut calculer $\det M$. On sait alors si la forme quadratique est dégénérée ($\det M = 0$) ou non. il faut ensuite déterminer χ_M, $Sp(M) = \{\lambda, \mu, \nu\} \subset \mathbb{R}$, E_λ, E_μ, E_ν qui sont deux à deux

orthogonaux.

Cas $rg\,M = 3$ **:**

1. ellipsoïde si λ, μ, ν non tous nuls et de même signe :

$$\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} + \frac{Z^2}{c^2} = 1$$

2. hyperboloïde (elliptique) à une nappe si λ, μ, k sont de même signe et ν de signe différent :

$$\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} - \frac{Z^2}{c^2} = 1$$

3. hyperboloïde (elliptique) à deux nappes si λ, μ sont de même signe et ν, k sont du signe opposé :

$$\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} - \frac{Z^2}{c^2} = -1$$

4. cône elliptique si λ, μ, k sont de même signe et ν de signe différent et $k = 0$:

$$\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} - \frac{Z^2}{c^2} = 0$$

Cas $rg\,M = 2$ **:**

1. paraboloïde elliptique si λ, μ, k sont de même signe et $\nu = 0$ et présence de Z :

$$\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} = Z$$

2. paraboloïde hyperboloique si λ, μ, k sont de signes contraires et $\nu = 0$ et présence de Z :

$$\frac{X^2}{a^2} - \frac{Y^2}{b^2} = Z$$

3. cylindre elliptique si λ, μ, k sont de même signe et $\nu = 0$ et non présence de Z :

$$\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} = 1$$

4. cylindre hyperboloique si λ, μ, k sont de signes contraires et $\nu = 0$ et non présence de Z :

$$\frac{X^2}{a^2} - \frac{Y^2}{b^2} = 1$$

Cas $rg\,M = 1$ **:** cylindre paraboloïque :

$$X^2 = 2pY$$

Chapitre 12

Fonctions à valeurs vectorielles - Dérivation, intégration

Dans tout le chapitre, F désigne un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie parfois euclidien. I, J désignent des intervalles de $\mathbb{R}$.

12.1 Dérivée en un point

Définition : Soit $f : I \to F,\ a \in I$. On dit que f admet une dérivée en a si

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \text{ existe } \in F$$

Cette limite est noté $f'(a)$.

$$f(x) = f(a) + (x-a) \cdot f'(a) + o(x-a)$$

$$f(x) = f(a) + (x-a) \cdot (f'(a) + o(1))$$

Structures : $\mathcal{D}(I,F)$ et $\mathcal{C}^1(I,F)$ sont des $\mathbb{R}$-espace vectoriels.
$\Phi : \begin{cases} \mathcal{D}(I,F) \to \mathcal{F}(I,F) \\ f \mapsto f' \end{cases}$ et $\Psi : \begin{cases} \mathcal{C}^1(I,F) \to \mathcal{C}(I,F) \\ f \mapsto f' \end{cases}$ sont linéaires.

12.2 Linéarité et dérivation

Proposition 1 : Soit $u \in \mathcal{L}(F,G)$. Si $f \in \mathcal{C}^1(I,F)$, alors $u \circ f \in \mathcal{C}^1(I,G)$ et $(u \circ f)' = u \circ f'$.

Corollaire : Soit F un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension n, de base $(e_1, \ldots, e_n)$.
Soit $f : \begin{cases} I \to F \\ t \mapsto f(t) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} f_i(t) e_i \end{cases}$, avec $f_i : I \to \mathbb{R}$.

$$f \in \mathcal{D}(I,F) \Leftrightarrow \forall i \in [\![1,n]\!],\ f_i \in \mathcal{D}(I,\mathbb{R})$$

et alors $f'(t) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} f_i'(t) e_i$.

Proposition 2 : Soient F, G et H trois $\mathbb{R}$-espaces vectoriels. Soit $B : F \times G \to H$ bilinéaire. Si $f \in \mathcal{C}^1(I, F)$ et $g \in \mathcal{C}^1(I, G)$, alors $B(f, g) \in \mathcal{C}^1(I, H)$ et

$$B(f,g)' = B(f', g) + B(f, g') \text{ où } B(f,g) : t \to B(f(t), g(t))$$

12.3 Dérivation et composition

Proposition 3 : Soit $f \in \mathcal{C}^1(J, F)$, $\varphi \in \mathcal{C}^1(I, J)$. Alors $(f \circ \varphi) \in \mathcal{C}^1(I, F)$ et

$$\forall t \in I,\ (f \circ \varphi)'(t) = \varphi'(t) f'(\varphi(t)) \text{ i.e. } (f \circ \varphi)' = \varphi'(f' \circ \varphi)$$

12.4 Inégalité des accroissements finies

Théorème 1 : Soit $f \in \mathcal{D}(I, F)$ telle que $\|f'\| \leqslant k$ i.e. $\forall t \in I,\ \|f'(t)\| \leqslant k$, alors

$$\forall a, b \in I,\ \|f(b) - f(a)\| \leqslant k|b - a|$$

Théorème : Soit $f \in \mathcal{D}(I, F)$.

$$f \text{ est constante} \Leftrightarrow f' = 0$$

12.5 Fonctions de classe $\mathcal{C}^k$, $k \geqslant 1$

Strucuture : $\big(\mathcal{C}^k(I, F), +, \cdot\big)$ est un sous-espace vectoriel de $(\mathcal{C}(I, F), +, \cdot)$.

Théorème : formule de Leibniz : Soient $f, g \in \mathcal{C}^n(I, \mathbb{K})$ où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}$. Alors $f \times g \in \mathcal{C}^n(I, \mathbb{K})$ et

$$(f \times g)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(n-k)} g^{(k)}$$

Définition : $\mathcal{C}^k$-difféomorphisme : Soit $\varphi \in \mathcal{C}^k(I, J)$ où I, J sont deux intervalles de $\mathbb{R}$. On dit que φ est un $\mathcal{C}^k$-difféomorphisme si :
- φ est bijective ;
- et $\varphi^{-1} \in \mathcal{C}^k(J, I)$.

Théorème : Soit $\varphi : I \to J = \varphi(I)$. φ est un $\mathcal{C}^1$-difféomporphisme si et seulement si

$$\varphi \in \mathcal{C}^1(I, J) \text{ et } \varphi' \text{ ne s'annule pas sur } I$$

12.6 Particularité des fonctions à valeurs réelles

Théorème 1 : Soit $f \in \mathcal{D}(I, \mathbb{R})$ avec I un intervalle ouvert. Si f admet un extremum en $x_o \in I$, alors $f'(x_0) = 0$.

Théorème 2 : théorème de Rolle : Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$ telle que $f(a) = f(b)$, alors

$$\exists c \in]a, b[\text{ tel que } f'(c) = 0$$

Théorème 3 : égalité des accroissements finis : Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$, alors

$$\exists c \in]a, b[\text{ tel que } f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$$

Théorème 4 : théorème de prolongement des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$: Soit $f : I \to \mathbb{R}$ continue sur I et dérivable sur $I \setminus \{a\}$. Si $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ \neq}} f'(x)$ existe dans $\mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$ et vaut l, alors

$$\lim_{\substack{x \to a \\ \neq}} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \text{ existe et vaut } l.$$

En particulier,
- si $\lim\limits_a f' = \pm\infty$, f n'est pas dérivable mais $\mathcal{C}_f$ présente une tangente verticale au point d'abscisse a ;
- si $\lim\limits_a f' = l \in \mathbb{R}$, alors f est dérivable en a et $f'(a) = l$.

Formule de Taylor avec reste intégrale : Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^{n+1}$. On a :

$$f(b) = f(a) + (b - a)f'(a) + \frac{(b - a)^2}{2!} f''(a) + \ldots + \frac{(b - a)^n}{n!} f^{(n)}(a) + \int_a^b \frac{(b - t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)dt$$

Inégalité de Taylor-Lagrange : Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction $\mathcal{C}^{n+1}$ et $a, b \in I$.
On note $M = Sup\left\{\left|f^{(n+1)}(t)\right| |t \text{ compris entre } a \text{ et } b\right\}$. On a :

$$\left|f(b) - \left[f(a) + (b - a)f'(a) + \ldots + \frac{(b - a)^n}{n!} f^{(n)}(a)\right]\right| \leqslant \frac{M|b - a|^{n+1}}{(n + 1)!}$$

Formule de Taylor-Young : Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction et $a \in I$ fixé.
On suppose que f est $\mathcal{C}^n$ au voisinage $v(a)$ de a.
On a :

$$\forall x \in v(a),\ f(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + \frac{f''(a)}{2!}(x - a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x - a)^n + (x - a)^n \varepsilon(x)$$

avec $\varepsilon(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} 0$.

Définition : fonction convexe : $f : I \to \mathbb{R}$ est dite convexe sur I si

$$\forall (x, y) \in I/\ x < y,\ \forall \lambda \in [0, 1],\ f\left((1 - \lambda)x + \lambda y\right) \leqslant (1 - \lambda)f(x) + \lambda f(y)$$

Propriété : $\forall X, Y \in \mathcal{C}_f$ avec $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de f une fonction convexe. La corde $[XY]$ est au-dessus de l'arc de courbe $\widehat{XY}$.

Propriété : croissance des pentes dont on a fixé une extrémité : Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction. On a : f convexe sur I

ssi $\forall P, Q, R \in \mathcal{C}_f$ d'abscisses $x < z < y$, on a pente$(PQ) \leqslant$ pente(PR) ;

ssi $\forall P, Q, R \in \mathcal{C}_f$ d'abscisses $x < z < y$, on a pente$(PR) \leqslant$ pente(QR) ;

ssi $\forall P, Q, R \in \mathcal{C}_f$ d'abscisses $x < z < y$, on a pente$(PQ) \leqslant$ pente(QR).

Caractérisation analytique : Soit $f : I \to \mathbb{R}$.

- f convexe sur I si et seulement si pour tout $a \in I$ la fonction $\left| \begin{array}{ccc} I \setminus \{a\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} \end{array} \right.$ est croissante.
- Avec f dérivable, on a : f convexe sur I si et seulement si f' croissante sur I.

Conséquences de la caractérisation analytique :
- Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction 2 fois dérivable sur I. On a : f convexe sur I si et seulement si f' est croissante sur I.
- Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur I. Alors $\mathcal{C}_f$ est située au dessus de toutes ses tangentes.

Inégalités de convexité :
- exp est convexe sur $\mathbb{R}$: $\forall x \in \mathbb{R},\ e^x \geqslant x+1$.
- ln est concave sur $]0,+\infty[$: $\forall x \in]0,+\infty[,\ \ln x \leqslant x-1$.
- sin est concave sur $[0,\frac{\pi}{2}]$: $\forall x \in [0,\frac{\pi}{2}],\ \frac{2}{\pi}x < \sin x < x$.

Généralisation : Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction convexe. Soit $n \in \mathbb{N}^\star$ et $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ tel que $\forall i \in [\![1,n]\!],\ \alpha_i \geqslant 0$ et $\sum_{i=0}^{n} \alpha_i = 1$. Soit $x_1, \ldots, x_n \in I$. On a :

$$f(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_n x_n) \leqslant \alpha_1 f(x_1) + \alpha_2 f(x_2) + \ldots + \alpha_n f(x_n)$$

12.7 Intégration des fonctions vectorielles :

Propriété : Soit $f : [a,b] \to F$.

$$\left\| \int_{[a,b]} f \right\| \leqslant \int_{[a,b]} \|f\|$$

Propriété : linéarité et intégration : Soit $T \in \mathcal{L}(F,G)$, $f \in \mathcal{C}_m([a,b],F)$, alors :

$$T \circ f \in \mathcal{C}_m([a,b],G) \text{ et } \int_{[a,b]} (T \circ f) = T\left(\int_{[a,b]} f\right)$$

Théorème : théorème de positivité améliorée : Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ avec $a < b$, continue et positive sur $[a,b]$.
On a $\displaystyle\int_a^b f(t)dt = 0$ si et seulement si $f = 0_{\mathcal{L}(E)}$.

Théorème : somme de Riemann : Soit $f \in \mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$. On pose δ tel que pour toute subdivision $\sigma = (a = a_0, \ldots, a_n = b)$ de $[a,b]$, $\delta(\sigma) = \underset{i \in [\![0,n-1]\!]}{\text{Max}} (a_{i+1} - a_i)$. Alors, $\forall \varepsilon > 0,\ \exists \alpha > 0$ tel que pour toute subsdivision $\sigma(a_i)_{i \in [\![0,n-1]\!]}$ de $[a,b]$ telle que $\delta(\sigma) \leqslant \alpha$, pour tout choix $c = (c_1, \ldots, c_n) \in [a,b]^{\mathbb{N}}$ tel que $\forall i \in [\![0,n-1]\!],\ c_i \in [a_{i-1}, a_i]$,

$$\left| \int_a^b f(t)dt - \sum_{i=1}^{n} f(c_i)(a_i - a_{i-1}) \right| \leqslant \varepsilon$$

Chapitre 13

Intégration sur un intervalle quelconque : théorie

13.1 Cas des fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}^+$

Définition : fonction continue par morceaux sur un intervalle : Une fonction $f : I \to \mathbb{K}$ où ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) est dite continue par morceaux sur I si elle est continue par morceaux sur chaque segment $J \subset I$.

Définition : intégrabilité : Soit $f : I \to \mathbb{R}^+$ où I est un intervalle de $\mathbb{R}$. f est dite intégrable (ou sommable) sur I si

- $f \in \mathcal{C}_m(I, \mathbb{R}^+)$;
- et s'il existe $M \in \mathbb{R}^+$ tel que pour tout segment $J \subset I$, $\displaystyle\int_J f \leqslant M$.

On appelle alors intégrale de f sur I le nombre :

$$\int_I f = \mathrm{Sup}\left\{\int_J f : \ J \text{ segment } / \ J \subset I\right\}$$

Définition : suite exhaustive de segments : Soit I un intervalle. On appelle suite exhaustive de segments de I toute suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ croissante pour l'inclusion de segments telle que $\displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}} I_n = I$.

Propriété : propriété fondamentale : Soit $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite exhaustive de segments de I. Soit J un segment inclus dans I. Alors $\exists n_0 \in \mathbb{N} \ / \ J \subset I$ (et a fortiori, si $n \geqslant n_0$, $J \subset I_n$).

Théorème : Soit I un intervalle, soit $f \in \mathcal{C}_m(I, \mathbb{R}^+)$. Soit $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite exhaustive de segments de I.

$$f \text{ est intégrable sur } I \text{ si et seulement si la suite } \left(\int_{I_n} f\right)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge.}$$

Et alors, $\displaystyle\int_I f = \lim_{n\to+\infty} \int_{I_n} f$.

Exemple : « intégrale de Riemann » :

$f : \begin{cases} [1,+\infty[\to \mathbb{R} \\ t \mapsto \dfrac{1}{t^\alpha} \end{cases}$ est intégrable sur $[1,+\infty[$ si et seulement si $\alpha > 1$ et alors $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha} = \frac{1}{\alpha - 1}$

$g : \begin{cases}]0,1] \to \mathbb{R} \\ t \mapsto \dfrac{1}{t^\alpha} \end{cases}$ est intégrable sur $]0,1]$ si et seulement si $\alpha < 1$ et alors $\displaystyle\int_0^{1} \frac{dt}{t^\alpha} = \frac{1}{1-\alpha}$

Propriété : « linéarité » : Soient $f, g \in \mathcal{C}_m(I, \mathbb{R}^+)$ et $\alpha \in \mathbb{R}^+$. Si f et g sont intégrable sur I, alors $\alpha f + g$ est intégrable sur I et

$$\int_I \alpha f + g = \alpha \int_I f + \int_I g$$

Propriété : croissance et comparaison : Soient $f, g \in \mathcal{C}_m(I, \mathbb{R}^+)$ telles que $f \leqslant g$. Alors si g est intégrable, alors f est intégrable et

$$\int_I f \leqslant \int_I g$$

Propriété : positivité améliorée : Si $f \in \mathcal{C}(I, \mathbb{R}^+)$. Si f est intégrable sur I et si $\displaystyle\int_I f = 0$, alors $f = 0$.

Prorpiété préliminaire : Soit $f \in \mathcal{C}_m(I, \mathbb{R}^+)$. Si f est intégrable sur I et si $I' \subset I$ alors f est intégrable sur I' et

$$\int_{I'} f \leqslant \int_I f$$

Théorème : principe de scission : Soit $f \in \mathcal{C}_m(I, \mathbb{R}^+)$, soit $c \in I$. On pose $I^+ = I \cap [c, +\infty[$, $I^- = I \cap]-\infty, c]$ alors f est intégrable sur I si et seulement si f est intégrable sur I^+ et sur I^- et alors

$$\int_I f = \int_{I^+} f + \int_{I^-} f$$

Théorème : principe de comparaison : Soient $f, g \in \mathcal{C}_m([a,b[, \mathbb{R}^+)$. Si $f(t) \underset{t \to b^-}{=} o\left(g\left(t\right)\right)$ ou $\underset{t \to b^-}{=} O\left(g\left(t\right)\right)$ ou $f(t) \underset{t \to b^-}{\sim} g(t)$ et si g est intégrable sur $[a,b[$, alors f est aussi intégrable sur $[a,b[$.

Corollaire : Si $f \underset{b^-}{\sim} g$. f et g seront toutes les deux intégrables ou toutes deux non intégrables.

Théorème : nouvelle caractérisation de l'intégrabilité des fonctions positives : Soit $f \in \mathcal{C}_m([a,b[, \mathbb{R}^+)$ Soit $F : \begin{cases} [a,b[\to \mathbb{R} \\ X \mapsto \displaystyle\int_a^X f(t)dt = \int_{[a,X]} f \end{cases}$. f est intégrable sur $[a,b[$ si et seulement si F admet à gauche en b une limite finie et alors

$$\int_{[a,b[} f = \lim_{X \to b^-} \int_a^X f(t)dt$$

Proposition : comparaison série intégrale : Soit $f \in \mathcal{C}_m([0,+\infty[,\mathbb{R}^+)$ décroissante sur son intervalle de définition. Alors f est intégrable sur $[0,+\infty[$ si et seulement si $\sum_{n\in\mathbb{N}} f(n)$ converge.

13.2 Cas des fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$

Définition : Soit $f \in \mathcal{C}_m(I,\mathbb{K})$ où I est un intervalle de $\mathbb{R}$ et $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

f est dite intégrable si $|f|$ est intégrable.

Proposition : comparaison : Soit $f \in \mathcal{C}_m(I,\mathbb{K})$, $\varphi \in \mathcal{C}_m(I,\mathbb{R}^+)$.

Si $|f| \leqslant \varphi$ et si φ est intégrable, alors f est intégrable.

Structure : On note $\mathcal{L}^1(I,\mathbb{K})$ l'ensemble des fonctions intégrables de I dans $\mathbb{K}$.

$(\mathcal{C}^1(I,\mathbb{K}))$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Définitions : Soit $f \in \mathcal{C}_m(I,\mathbb{R})$. On note $f^+ = Max(f,0)$ et $f^- = Max(-f,0)$.

Théorème : intégrale d'une fonction à valeurs réelles : Soit $f \in \mathcal{C}_m(I,\mathbb{R})$.

f est intégrable si et seulement si f^+ et f^- le sont.

Définition :

$$\int_I f = \int_I f^+ - \int_I f^-$$

Théorème : intégrale d'une fonction à valeurs complexes intégrable : Soit $f \in \mathcal{C}_m(I,\mathbb{C})$.

f est intégrable si et seulement si $Re(f)$ et $Im(f)$ le sont.

Définition :

$$\int_I f = \int_I Re(f) + i\int_I Im(f)$$

Proposition : utilisation de suite exhaustive de segments : Soit $f \in \mathcal{L}^1(I,\mathbb{K})$ (i.e. f est intégrable). Soit $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite exhaustive de segments de I. Alors :

$$\left(\int_{I_n} f\right)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge et } \int_I f = \lim_{n\to+\infty} f$$

Proposition : autre mode de calcul : Soit $f \in \mathcal{L}^1([a,b[,\mathbb{K})$ (i.e. f est intégrable). Soit $F : \begin{cases} [a,b[\to \mathbb{K} \\ X \mapsto \displaystyle\int_a^X f(t)dt \end{cases}$. Alors :

$$\int_a^b f(t)dt = \lim_{X\to b^-} \int_a^X f(t)dt$$

Propriété : linéarité : Si $f, g \in \mathcal{L}^1(I, \mathbb{R})$ et si $\alpha \in \mathbb{K}$, alors :

$$\int_I \alpha f + g = \alpha \int_I f + \int_I g \text{ ou encore } Int : \begin{cases} \mathcal{L}^1(I, \mathbb{K}) \to \mathbb{K} \\ f \mapsto \displaystyle\int_I f \end{cases} \quad \text{est linéaire.}$$

Propriété : croissance : Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$: Si $f, g \in \mathcal{L}^1(I, \mathbb{R})$ et si $f \leqslant g$, alors :

$$\int_I f \leqslant \int_I g$$

Propriété : inégalité : Si $f \in \mathcal{L}^1(I, \mathbb{K})$, alors :

$$\left| \int_I f \right| \leqslant \int_I |f|$$

Propriété : bornes : Si $a > b$, $f \in \mathcal{L}^1(]b, a], \mathbb{K})$, on pose :

$$\int_a^b f(t)dt = -\int_b^a f(t)dt = \int_{]b,a]} f$$

Propriété : conjugué : Si $f \in \mathcal{L}^1(I, \mathbb{C})$, alors $\overline{f} \in \mathcal{L}^1(I, \mathbb{C})$ et

$$\int_I \overline{f} = \overline{\int_I f}$$

13.3 Changement de variable

Théorème 1 : cas d'un segment : Soit $f \in \mathcal{C}_m([a, b], \mathbb{K})$. Soit $\varphi \in \mathcal{C}^1([\alpha, \beta], [a, b])$. Alors :

$$\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(u)du = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$$

Théorème 2 : cas d'un intervalle : Soit $f \in \mathcal{C}_m(I, \mathbb{K})$ avec par exemple $I = [a, b[$. Soit $\varphi \in \mathcal{C}^1(J, I)$ où $J = [\alpha, \beta[$ (ou $]\beta, \alpha]$). $a = \varphi(\alpha)$ et $b = \lim\limits_{t \to \beta^-} \varphi(t)$ (ou $b = \lim\limits_{t \to \beta^+} \varphi(t)$) avec φ bijective. Alors :

$$f \in \mathcal{L}^1([a, b[, \mathbb{K}) \text{ si et seulement si } \big[\, (f \circ \varphi) \times \varphi' \in \mathcal{L}^1([\alpha, \beta[, \mathbb{K})\big]$$

$$\text{et alors} \int_a^b f(u)du = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$$

13.4 Intégration par partie

Pas de thoérème au programme de Spé pour l'intégration par partie sur un intervalle.

Théorème : intégration par partie :

$$\int_a^X f(t)dt = \int_a^X u(t)v'(t)dt = [u(t)v(t)]_a^X - \int_a^X u'(t)v(t)dt$$

où $X \in [a, b[,\ u, v \in \mathcal{C}^1([a, b[, \mathbb{K})$. On note $l_1 = \lim_{X \to b^-} u(X)v(X)$ et $l_2 = \lim_{X \to b^-} \int_a^X (u'v)(t)dt$.
Si l_1 et l_2 existent dans $\mathbb{R}$:

- si $f \geqslant 0$: on a alors proubé que $f \in \mathcal{L}^1([a, b[, \mathbb{R}^+)$;
- si $f \leqslant 0$: le calcul ne sert à rien sauf si on a montré au préalable que $f \in \mathcal{L}^1([a, b[, \mathbb{R})$.

13.5 Intégrales « impropres » : attention danger

Il est possible que $\lim_{X \to b^-} \int_a^X f(t)dt$ existe (et soit finie) sans que f soit intégrable (mais cela n'arrive pas si $f \geqslant 0$).
Dans ce cas, on dit (encore parfois) que l'intégrale $\int_a^b f(t)dt$ « converge » et on note (quand même exceptionnellement) $\int_a^b f(t)dt = \lim_{X \to b^-} \int_a^X f(t)dt$.
On parle d'intégrale « impropre ».

Chapitre 14

Intégration sur un intervalle quelconque : grands théorèmes

14.1 Structure et convergence

Définitions et structures :

- $\mathcal{L}^1\mathcal{C}(I,\mathbb{K}) = \mathcal{L}^1(I,\mathbb{K}) \cap \mathcal{C}(I,\mathbb{K})$: il s'agit de l'ensemble des fonctions continues intégrables. $\mathcal{L}^1\mathcal{C}(I,\mathbb{K})$ a une structure d'espace vectoriel. On définie alors :

$$\forall f \in \mathcal{L}^1\mathcal{C}(I,\mathbb{K}),\ N_1(f) = \|f\|_1 = \int_I |f| dt$$

- $\mathcal{L}^2\mathcal{C}(I,\mathbb{C}) = \{f \in \mathcal{C}(I,\mathbb{C}) \ / \ f^2 \in \mathcal{L}^1(I,\mathbb{C})\}$: il s'agit de l'ensemble des fonctions continues intégrables. C'est un espace préhilbertien complexe. $\mathcal{L}^2\mathcal{C}(I,\mathbb{C})$ a une structure d'espace vectoriel. On définit alors :

$$\forall f,g \in \mathcal{L}^2\mathcal{C}(I,\mathbb{C}),\ (f \mid g) = \int_I \overline{f(t)} g(t) dt$$

- $\mathcal{L}^2\mathcal{C}(I,\mathbb{R}) = \{f \in \mathcal{C}(I,\mathbb{R}) \ / \ f^2 \in \mathcal{L}^1(I,\mathbb{R})\}$: il s'agit de l'ensemble des fonctions continues intégrables. $\mathcal{L}^2\mathcal{C}(I,\mathbb{R})$ a une structure d'espace vectoriel. Les propriétés de $\mathcal{L}^2\mathcal{C}(I,\mathbb{C})$ restent valables. On définit alors :

$$\forall f,g \in \mathcal{L}^2\mathcal{C}(I,\mathbb{R}),\ (f \mid g) = \int_I f(t) g(t) dt$$

Propriété : $\forall f,g \in \mathcal{L}^2\mathcal{C}(I,\mathbb{C}),\ f \times g \in \mathcal{L}^1\mathcal{C}(I,\mathbb{C})$.

Propriété : Si $f,g \in \mathcal{L}^2\mathcal{C}(I,\mathbb{K})$, alors :

$$|(f \mid g)| \leqslant N_1(fg) \leqslant N_2(f) \times N_2(g)$$

Proposition : convergence en moyenne et convergence des intégrales : Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{L}^1(I,\mathbb{K})^{\mathbb{N}}$, soit $f \in \mathcal{L}^1(I,\mathbb{K})$. Si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en moyenne (i.e. au sens de N_1) vers f, alors :

$$\lim_{n\to+\infty} \int_I f_n = \int_I f$$

Théorème : convergence sur un segment et converge des intégrales : Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{C}([a,b],\mathbb{K})^{\mathbb{N}}$. Soit $f : [a,b] \to \mathbb{K}$. Si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f, alors :

- $f \in \mathcal{C}([a,b],\mathbb{K})$;
- $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en moyenne et en moyenne quadratique vers f et

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{[a,b]} f_n = \int_{[a,b]} f$$

14.2 Le théorème de convergence dominée

Théorème : théorème de convergence dominée : Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{C}_m(I,\mathbb{K})^{\mathbb{N}}$ et $f \in \mathcal{C}_m(I,\mathbb{K})$ telles que :

- $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers f
- et $\exists g \in \mathcal{L}^1(I,\mathbb{R}^+)$ / $\forall n \in \mathbb{N},\ |f_n| \leqslant g$.

Alors :

- $f_n \in \mathcal{L}^1(I,\mathbb{K})$;
- $f \in \mathcal{L}^1(I,\mathbb{K})$ et

$$\lim_{n\to+\infty} \int_I f_n = \int_I f$$

14.3 Intégration terme à terme d'une série

Théorème 1 : cas d'un segment, convergence uniforme : Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{C}([a,b],\mathbb{K})$ et $S : [a,b] \to \mathbb{K}$. Si la série de fonction $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n$ converge uniformément et a pour somme S, alors : $S \in \mathcal{C}([a,b],\mathbb{K})$ et

$$\int_a^b S(t)dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_a^b f_n(t)dt$$

Théorème 2 : conséquence du théorème de convergence dominée : Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{C}_m(I,\mathbb{R})^{\mathbb{N}}$. Si $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n$ converge simplement et a pour somme $S \in \mathcal{L}^1(I,\mathbb{R}^+)$, alors :

$$\int_I S = \sum \int_I f_n$$

Théorème 3 : Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{L}^1(I,\mathbb{K})^{\mathbb{N}}$. Si $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n$ converge simplement et a pour somme $S \in \mathcal{C}_m(I,\mathbb{K})$ et si $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} \int |f_n|$ converge, alors

$$S \in \mathcal{L}^1(I,\mathbb{K}) \text{ et } \int_I S = \sum \int_I f_n \text{ i.e. } \int_I \sum_{n=0}^{+\infty} f_n = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_I f_n$$

14.4 Intégrale dépendant d'un paramètre

Théorème 1 : continuité sous le signe $\displaystyle\int$: Soit $f : \begin{cases} A \times I \to \mathbb{K} \\ (x,t) \mapsto f(x,t) \end{cases}$ où $A \subset \mathbb{R}^n$, I est un intervalle de $\mathbb{R}$. On suppose que :

- $\forall t \in I,\ f(.,t) : \begin{cases} A \to \mathbb{K} \\ x \mapsto f(x,t) \end{cases}$ est continue sur A ;
- $\forall x \in A,\ f(x,.) : \begin{cases} I \to \mathbb{K} \\ t \mapsto f(x,t) \end{cases}$ est continue par morceaux sur I ;
- $\exists g \in \mathcal{L}^1(I,\mathbb{R}^+)\ /\ \forall (x,t) \in A \times I,\ |f(x,t)| \leqslant g(t)$

alors :

$$F : \begin{cases} A \to \mathbb{K} \\ x \mapsto \displaystyle\int_I f(x,t)dt \end{cases} \text{ est continue.}$$

Corollaire : Soit $f \in \mathcal{C}([c,d] \times [a,b], \mathbb{K})$. Soit $F : \begin{cases} [c,d] \to \mathbb{K} \\ x \mapsto \displaystyle\int_a^b f(x,t)dt \end{cases}$, alors F est continue.

Théorème 2 : dérivation sous le signe $\displaystyle\int$: Soit $f : \begin{cases} J \times I \to \mathbb{K} \\ (x,t) \mapsto f(x,t) \end{cases}$. On suppose que :

- $\forall x \in J,\ f(x,.) \in \mathcal{L}^1(I,\mathbb{K})$;
- f admet sur $J \times I$ une dérivée partielle $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ qui vérifie :
  - $\forall t \in I,\ \dfrac{\partial f}{\partial x}(.,t) : \begin{cases} J \to \mathbb{K} \\ x \mapsto \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t) \end{cases}$ est continue sur J ;
  - $\forall x \in J,\ \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,.) : \begin{cases} I \to \mathbb{K} \\ t \mapsto \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t) \end{cases}$ est continue par morceaux sur I ;
  - $\exists g \in \mathcal{L}^1(I,\mathbb{R}^+)\ /\ \forall (x,t) \in J \times I,\ \left|\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \leqslant g(t)$

Alors $F : \begin{cases} J \to \mathbb{K} \\ x \mapsto \displaystyle\int_I f(x,t)dt = \int_I f(x,.) \end{cases}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur J et

$$\forall x \in J,\ F'(x) = \int_I \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)dt$$

14.5 La fonction Γ

Définition : On note Γ la fonction définie sur $\mathbb{R}^{+\star}$ par

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}dt$$

Propriétés : $\Gamma \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^{+\star}, \mathbb{R})$ et $\forall x \in \mathbb{R}^{+\star},\ \forall k \in \mathbb{N}$,

$$\Gamma^{(k)}(x) = \int_0^{+\infty} (\ln t)^k\, t^{x-1}e^{-t}dt$$

$$\forall x \in \mathbb{R}^{+\star},\ \Gamma(x+1) = x \cdot \Gamma(x)$$

$$\forall n \in \mathbb{N},\ n! = \Gamma(n+1)$$

Chapitre 15

Intégrales doubles

15.1 Cas d'une fonction continue sur un pavé

Théorème : un thérorème de Fubini pour les fonctions continues sur un pavé : Soit $f \in \mathcal{C}([a,b] \times [c,d], \mathbb{C})$ alors :

$$\int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)dx \right) dy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)dy \right) dx$$

Proposition : Si $f(x,y) = h(x) \times k(y)$ avec $h \in \mathcal{C}([a,b], \mathbb{R})$ et $k \in \mathcal{C}([c,d], \mathbb{R})$, alors :

$$\iint_{[a,b]\times[c,d]} f(x,y)dxdy = \iint_{[a,b]\times[c,d]} h(x) \cdot k(y)dxdy = \int_a^b h(x)dx \cdot \int_c^d k(y)dy$$

15.2 Cas d'une fonction positive sur $I \times J$

Définition : Soient I et J deux intervalles réels. Soit $f : I \times J \to \mathbb{R}^+$ continue.
f est dite intégrable sur $I \times J$ s'il existe $k \in \mathbb{R}^+$ tel que
- pour tout segment $I' \subset I$,
- pour tout segment $J' \subset J$,

on a

$$\iint_{I\times J} f \leqslant k$$

On appelle alors intégrale de f sur $I \times J$, que l'on note $\displaystyle\iint_{I\times J} f$ le nombre

$$\text{Sup} \left\{ \iint_{I'\times J'} f, \begin{array}{l} I' \text{ segment } /I' \subset I \\ J' \text{ segment } /J' \subset J \end{array} \right\}$$

Théorème : Soit $f \in \mathcal{C}(I \times J, \mathbb{R}^+)$. Soit $(I_n)_n$ une suite exhaustive de segments de I. Soit $(J_n)_n$ une suite exhaustive de segments de J.
Alors f est intégrable sur $I \times J$ si et seulement si

$$\lim_{n\to+\infty} \iint_{I_n\times J_n} f \text{ existe}$$

$$\text{et alors } \iint_{I\times J} f = \lim_{n\to+\infty} \iint_{I_n\times J_n} f$$

Théorème : théorème de Fubini pour les fonctions positives de $I \times J$: Soit $f \in \mathcal{C}(I \times J, \mathbb{R}^+)$. Si :

1. $\forall x \in I,\ f(x,.) \in \mathcal{L}^1(J, \mathbb{R})$
2. puis la fonction $g : \begin{cases} I \to \mathbb{R}^+ \\ x \mapsto \displaystyle\int_J f(x,.) \end{cases}$ est intégrable sur I,

Alors f est intégrable sur $I \times J$ et

$$\iint_{I \times J} = \int_I g = \int_I \left(\int_J f(x,.) \right) dx$$

Ou encore

$$\iint_{I \times J} f(x,y) dx dy = \int_I \left(\int_J f(x,y) dy \right) dx$$

Noter que l'on peut « inverser » les rôles de x et y dans les hypothèses.

15.3 Cas d'une fonction de $I \times J$ dans $\mathbb{C}$

Définition : Soit $f \in \mathcal{C}(I \times J, \mathbb{C})$.
f est dite intégrable si $|f|$ est intégrable.

Cas d'une fonction à valeurs réelles : Soit $f \in \mathcal{C}(I \times J, \mathbb{R})$. On pose $f^+ = \text{Max}(f, 0)$ et $f^- = \text{Max}(-f, 0)$.
f est intégrable sur $I \times J \Leftrightarrow f^+$ et f^- sont intégrables sur $I \times J$ et alors

$$\iint_{I \times J} f = \iint_{I \times J} f^+ - \iint_{I \times J} f^-$$

Cas d'une fonction à valeurs complexes : Soit $f \in \mathcal{C}(I \times J, \mathbb{C})$.
f est intégrable sur $I \times J \Leftrightarrow Re(f)$ et $Im(f)$ sont intégrables sur $I \times J$ et alors

$$\iint_{I \times J} f = \iint_{I \times J} Re(f) + i \iint_{I \times J} Im(f)$$

Théorème de Fubini pour les fonctions à valeurs dans $\mathbb{K}$: Soit $f \in \mathcal{C}(I \times J, \mathbb{K})$ avec f intégrable. Si :

- $\forall x \in I,\ f(x,.) \in \mathcal{L}^1(J, \mathbb{K})$
- puis $g : \begin{cases} I \to \mathbb{K} \\ x \mapsto \displaystyle\int_J f(x,.) = \int_J f(x,y) dy \end{cases} \in \mathcal{L}^1(I, \mathbb{K})$

alors :

$$\iint_{I \times J} f = \int_I g = \int_I \left(\int_J f(x,y) dy \right) dx$$

15.4 Intégrale sur une partie simple

Définition : Une partie A de $\mathbb{R}^2$ est dite élémentaire si on peut l'écrire à la fois

- $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ a \leqslant x \leqslant b \text{ et } \varphi_1(x) \leqslant y \leqslant \varphi_2(x)\}$
- $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ c \leqslant y \leqslant d \text{ et } \psi_1(y) \leqslant x \leqslant \psi_2(y)\}$

où φ_1, φ_2 (resp. ψ_1, ψ_2) sont continues sur $[a,b]$ (resp. sur $[c,d]$).

Propriété : En reprenant les notations de la définition précédente,

$$A \subset [a,b] \times [c,d]$$

et en particulier, toute partie élémentaire est compacte.

Conséquence : Soit $f \in \mathcal{C}(\Delta, \mathbb{K})$ où Δ est une partie élémentaire incluse dans $[a,b] \times [c,d]$. Soit $\widehat{f} : \left\{ \begin{array}{l} [a,b] \times [c,d] \to \mathbb{K} \\ (x,y) \mapsto \left| \begin{array}{l} f(x,y) \text{ si } (x,y) \in A \\ 0 \text{ si } (x,y) \notin A \end{array} \right. \end{array} \right.$. Alors :

$$\forall x \in [a,b],\ \widehat{f}(x,.) \in \mathcal{C}_m([c,d], \mathbb{K})$$

$$\forall y \in [c,d],\ \widehat{f}(.,y) \in \mathcal{C}_m([a,b], \mathbb{K})$$

Autre conséquence : Soit $f \in \mathcal{C}(\Delta, \mathbb{K})$ où Δ est une partie élémentaire incluse dans $[a,b] \times [c,d]$ et soit $\widehat{f}$ le prolongement défini précédement.

- $\forall x \in [a,b]$, comme $\widehat{f}(x,.) \in \mathcal{C}_m([c,d], \mathbb{K})$, on peut définir $h(x) = \displaystyle\int_{[c,d]} \widehat{f}(x,.)$;
- $\forall y \in [c,d]$, comme $\widehat{f}(.,y) \in \mathcal{C}_m([a,b], \mathbb{K})$, on peut définir $k(x) = \displaystyle\int_{[a,b]} \widehat{f}(.,y)$.

Lemme : Les fonctions h et k aisni définies sont continues respectivement sur $[a,b]$ et $[c,d]$.

Théorème : théorème de Fubini sur une partie élémentaire : Soit $f \in \mathcal{C}(A, \mathbb{K})$ où A est une partie élémentaire de $\mathbb{R}^2$. Soient h et k telles que $h(x) = \displaystyle\int_{[c,d]} \widehat{f}(x,.)$ et $k(x) = \displaystyle\int_{[a,b]} \widehat{f}(.,y)$. Alors

$$\int_{[a,b]} h = \int_{[c,d]} k$$

ce qui signifie que si

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ a \leqslant x \leqslant b \text{ et } \varphi_1(x) \leqslant y \leqslant \varphi_2(x)\}$$

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ c \leqslant y \leqslant d \text{ et } \psi_1(y) \leqslant x \leqslant \psi_2(y)\}$$

alors,

$$\int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy \right) dx = \int_c^d \left(\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)dx \right) dy$$

Définition : Ce nombre commun s'appelle l'intégrale double de f sur A et est noté

$$\iint_A f \text{ ou } \iint_A f(x,y)dxdy$$

Définition : partie simple : On appelle partie simple du plan toute réunion finie $\displaystyle\bigcup_{i=1}^n A_i$ de parties élémentaires avec la condition :

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, \text{ si } i \neq j,\ \overbrace{A_i \cap A_j}^{\circ} = \varnothing$$

Définition : Soit $f \in \mathcal{C}(A, \mathbb{K})$ où A est une partie simple. On définit alors

$$\iint_A f = \sum_{i=1}^{n} \iint_{A_i} f \text{ si } A = \bigcup_{i=1}^{n} A_i,\ A_i \text{ partie élémentaire.}$$

15.5 Changement de variable dans les intégrales doubles

Définition : $\mathbb{C}^1$-difféomorphsime : Soient U et V deux ouverts de $\mathbb{R}^n$. Soit $\varphi : U \to V$. On dit que φ est un $\mathbb{C}^1$-difféomorphisme si φ est bijective et φ et φ^{-1} sont de classe $\mathcal{C}^1$.

Définition : matrice jacobienne : Soit $\varphi \in \mathcal{C}^1(U, V)$ où U, V sont deux ouverts de $\mathbb{R}^2$. Ainsi $\varphi : \begin{cases} U \to V \\ (u,v) \mapsto (x(u,v), y(u,v)) \end{cases}$ avec $x, y \in \mathcal{C}^1(U, \mathbb{R})$ Elles admettent donc des dérivées partielles.
La matrice jacobienne de φ au point $(u, v) \in U$ est la matrice :

$$J_\varphi(u,v) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u}(u,v) & \dfrac{\partial x}{\partial v}(u,v) \\ \dfrac{\partial y}{\partial u}(u,v) & \dfrac{\partial y}{\partial v}(u,v) \end{pmatrix}$$

Jacobien de φ en (u, v) : c'est le déterminant de $J_\varphi(u, v)$.

$$\text{jac}_\varphi(u,v) \text{ ou } \text{jac}(\varphi)(u,v) = \det\left(J_\varphi(u,v)\right) \underset{\text{souvent}}{\overset{\text{noté}}{=}} \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}(u,v)$$

Théorème : théorème de changement de variable dans $\mathbb{R}^2$: Soient U et V deux ouverts de $\mathbb{R}^2$. Soit φ un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de U dans V. Soit $\varphi \in \mathcal{C}(A, B)$ où A et B sont deux parties simples de $\mathbb{R}^2$ telles que $A \subset U,\ B \subset V,\ \varphi(A) = B$. Alors :

$$\iint_B f = \iint (f \circ \varphi) \times |\text{jac}(\varphi)|$$

$$\text{i.e.} \iint_B f(x,y)dxdy = \iint_A f\big(x(u,v), y(u,v)\big) \times \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}(u,v)\right| dudv$$

Proposition : Si $\varphi \in \mathcal{C}^1(U, V)$ avec U et V deux ouverts de $\mathbb{R}^2$, et si jac(φ) ne s'annule pas sur U (i.e. J_φ est inversible) et si φ est bijective, alors φ est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme.

Chapitre 16

Séries de Fourier

16.1 Champs d'application de la théorie

Les applications 2π-périodiques : Les ensembles suivant sont inclus dans $\mathcal{B}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$:

- $\mathcal{CM}_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$: fonctions continues par morceaux sur $\mathbb{R}$ et 2π-périodiques ;
- $\mathcal{C}_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$: fonctions continues sur $\mathbb{R}$ et 2π périodiques ;
- $\mathcal{C}^1\mathcal{M}_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})(\mathbb{R}, \mathbb{C})$: fonctions $\mathbb{C}^1$ par morceaux et 2π-périodiques.

Définition : fonction $\mathbb{C}^1$ par morceaux sur $\mathbb{R}$: Soit $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$. On dit que f est $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $\mathbb{R}$ si f est $\mathbb{C}^1$ par morceaux sur tout segments $[a, b]$ de $\mathbb{R}$ i.e. $\exists \sigma = (a = a_0, a_1, \ldots, a_n = b)$ une subdivision de $[a, b]$ telle que pour tout entier naturel de $[\![0, n-1]\!]$, la restriction de f à tout inter $]a_i, a_{i+1}[$ est prolongeable sur $[a_i, a_{i+1}]$ en une fonction $\mathbb{C}^1$ et notamment, f ainsi prolongée admet respectivement en a_i et a_{i+1} une dérivée respectivement à gauche et à droite.
On note $\mathcal{C}^1\mathcal{M}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ l'ensemble des fonctions $\mathbb{C}^1$ continues par morceaux de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{C}$.

Propriété : prolongement par périodicité : Soit $f \in \mathcal{C}_m([a, a+2\pi], \mathbb{C})$ telle que $f(a) = f(a+2\pi)$. Alors, il existe une unique fonction $g \in \mathcal{CM}_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ telle que :

$$g_{|[a,a+2\pi]} = f$$

Variante : Soit $f \in \mathcal{C}_m([a, a+2\pi[, \mathbb{C})$ et telle que $\lim\limits_{x \to a^-} f(x+2\pi)$ existe dans $\mathbb{C}$, alors :

$$\exists! g \in \mathcal{CM}_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C}) \ / \ g_{[a,a+2\pi[} = f$$

Proposition : rappels intégration : SOit $f \in \mathcal{CM}_T(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ (i.e. une fonction continue par morceaux T-périodique. Soient $a, b \in \mathbb{R}$, alors :

$$\int_{a+T}^{b+T} f(t)dt = \int_a^b f(t)dt$$

$$\int_a^{a+T} f(t)dt = \int_0^T f(t)dt = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)dt$$

16.2 Coefficients de Fourier

Définition 1 : Soit $f \in \mathcal{CM}_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$. On pose pour tout $n \in \mathbb{Z}$:

$$c_n(f) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cdot e^{-int} dt = \frac{1}{2\pi} \int_{0}^{2\pi} f(t) e^{-int} dt$$

$c_n(f)$ est le coefficient de Fourier de f d'indice n.

Définition 2 : Soit $f \in \mathcal{CM}_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Soit $n \in \mathbb{N}$. On pose :

$$a_n(f) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cdot \cos(nt) dt = \frac{1}{\pi} \int_{0}^{2\pi} f(t) \cdot \cos(nt) dt$$

$$b_n(f) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cdot \sin(nt) dt = \frac{1}{\pi} \int_{0}^{2\pi} f(t) \cdot \sin(nt) dt$$

sont les coefficients de Fourier réels de f.

Propriétés : liens entre les coefficients a_n, b_n et c_n :

$$c_n = \frac{1}{2}(a_n - i \cdot b_n) \qquad c_{-n} = \frac{1}{2}(a_n + i \cdot b_n)$$

$$a_n = c_n + c_{-n} = 2Re(c_n) \qquad b_n = i \cdot (c_n - c_{-n}) = -2Im(c_n)$$

Propriété : effet de conjugaison :

$$c_n(\overline{f}) = \overline{c_{-n}(f)}$$

Propriété : effets de parité :

	f paire	f impaire
$\mathbb{K} = \mathbb{C}$	$c_{-n} = c_n$	$c_{-n} = -c_n$
$\mathbb{K} = \mathbb{R}$	$a_n(f) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(t) \cdot \cos(nt) dt$ $b_n(f) = 0$	$a_n(f) = 0$ $b_n(f) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(t) \cdot \sin(nt) dt$

Propriété : effet d'une translation dans le temps : Soit $f \in \mathcal{CM}_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, soit $a \in \mathbb{R}$. Soit $f_a : \begin{cases} R \to \mathbb{C} \\ t \mapsto f(t+a) \end{cases}$. Alors :

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \; c_n(f_a) = e^{ina} \cdot c_n(f)$$

Propriété : linéarité de $f \mapsto (c_n(f))_{n \in \mathbb{Z}}$: Soit $\Phi : \begin{cases} \mathcal{CM}_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C}) \to \mathbb{C}^{\mathbb{Z}} \\ f \mapsto (c_n(f))_{n \in \mathbb{Z}} \underset{\text{notation}}{\overset{\text{autre}}{=}} \left(\hat{f}(n)\right)_{n \in \mathbb{Z}} = \hat{f} \end{cases}$.

Φ est linéaire.

Propriété : La famille $(c_n(f))_{n \in \mathbb{Z}}$ est bornée et donc les familles $(a_n(f))_{n \in \mathbb{N}}$ et $(b_n(f))_{n \in \mathbb{N}}$ aussi.

Utilisation d'espaces vectoriels normés : Pour $\mathcal{C}_{2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{C})$, prenons :

$$\|f\|_1 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(t)|dt$$

Considérons $\tilde{\Phi} : \begin{cases} \mathcal{C}_{2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{C}) \to \mathcal{B}(\mathbb{Z},\mathbb{C}) \\ f \mapsto (c_n(f))_{n\in\mathbb{Z}} \end{cases}$. On considère comme norme sur $\mathcal{B}(\mathbb{Z},\mathbb{C})$:

$$\|u\|_\infty = \operatorname*{Sup}_{n\in\mathbb{Z}}|u_n|$$

Ainsi,

$$|||\tilde{\Phi}||| = 1$$

Proposition 1 : Soit $f \in \mathcal{CM}_{2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{C})$. Alors :

$$\lim_{n\to+\infty} c_n(f) = 0 = \lim_{n\to+\infty} c_{-n}(f)$$

et si $f \in \mathcal{CM}_{2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{R})$,

$$\lim_{n\to+\infty} a_n(f) = 0 = \lim_{n\to+\infty} b_n(f)$$

Propriété : effet de la dérivation : Soit $f \in \mathcal{C}^1_{2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{C})$. Alors :

$$\forall n \in \mathbb{Z},\ c_n(f') = in \cdot c_n(f)$$

Propriété : généralisation : Si $f \in \mathcal{C}^k_{2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{C})$, alors :

$$\forall n \in \mathbb{Z},\ c_n\left(f^{(k)}\right) = i^k n^k \cdot c_n(f)$$

Proposition 2 : Si $f \in \mathcal{C}^k_{2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{C})$, alors :

$$c_n(f) = o\left(\frac{1}{n^k}\right) \qquad c_{-n}(f) = o\left(\frac{1}{n^k}\right)$$

et si $f \in \mathcal{C}^k_{2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{R})$, alors :

$$a_n = o\left(\frac{1}{n^k}\right) \qquad b_n = o\left(\frac{1}{n^k}\right)$$

16.3 Convergence ponctuelle des séries de Fourier

Définitions : Soit $f \in \mathcal{CM}_{2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{C})$ respectivement $\mathcal{CM}_{2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{R})$

- On appelle série de Fourier de f la série (« trigonométrique ») de fonction :

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(f)e^{inx} \qquad \text{resp. } \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{n\in\mathbb{N}}\Big(a_n\cos(nx) + b_n\sin(nx)\Big)$$

- On appelle somme partielle d'ordre N la fonction :

$$x \mapsto \sum_{n=-N}^{N} c_n(f)e^{inx} \qquad \text{resp. } x \mapsto \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{n=1}^{N}\Big(a_n\cos(nx) + b_n\sin(nx)\Big)$$

- On dit que la série de Fourier converge simplement sur I si :

$$\forall x \in I,\ \lim_{N\to+\infty}\sum_{n=-N}^{N}\left(c_n(f)e^{inx}\right) \text{ existe dans } \mathbb{C}$$

$$\forall x \in I,\ \lim_{N\to+\infty}\frac{a_0(f)}{2} + \sum_{n=1}^{N}\Big(a_n\cos(nx) + b_n\sin(nx)\Big) \text{ existe dans } \mathbb{R}$$

Propriété : La somme $S(f)$ de la série de Fourier de f est évidemment 2π-périodique.

Théorème : théorème de Dirichlet : Soit $f \in \mathcal{C}^1\mathcal{M}_{2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{C})$. Alors pour tout réel x, la série de Fourier de f converge et a pour somme :

$$\frac{1}{2}\left(\lim_{y\to x^+} f(y) + \lim_{y\to x^-} f(y)\right)$$

Corollaire 1 : Si $f \in \mathcal{C}^1\mathcal{M}_{2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{C})$, alors $S(f)(x) = f(x)$ en tout point x où f est continue.

Corollaire 2 : Si $f \in \mathcal{C}^1\mathcal{M}_{2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{C}) \cap \mathcal{C}_{2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{C})$, alors

$$S(f) = f$$

16.4 Convergence quadratique de séries de Fourier

Produit scalaire : On pose pour $f, g \in \mathcal{C}_{2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{C})$:

$$(f \mid g) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \overline{f(t)}g(t)dt$$

$(. \mid .)$ est un produit scalaire complexe.
On lui associe la norme :

$$\|f\|_2 = \sqrt{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2\, dt}$$

Coefficients et sommes partielles de Fourier : On pose $e_n : \left\{\begin{array}{l}\mathbb{R} \to \mathbb{C}\\ t \mapsto e^{int}\end{array}\right.$, $n \in \mathbb{Z}$. Alors $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est orthonormale.

$$c_n(f) = (e_n \mid f)$$

$$\forall N \in \mathbb{N},\ S_N(f) = \sum_{n=-N}^{N} (e_n \mid f)\cdot e_n$$

Définition : On note $\mathcal{P} = \bigcup_{N\in\mathbb{N}} \mathcal{P}_n = Vect\left(\{e_n,\ n \in \mathbb{Z}\}\right)$. $\mathcal{P}$ est l'ensemble des « polynômes trigonométriques ». Un polynôme trigonométrique s'écrit donc :

$$p(t) = \sum_{n=-N}^{N} a_n e^{int} = \sum_{n=-N}^{N} a_n \left(e^{it}\right)^n$$

Théorème : inégalité de Bessel : Soit $f \in \mathcal{CM}_{2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{C})$. Alors :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \sum_{n=-N}^{N} |c_n(f)|^2 \leqslant \|f\|_2{}^2$$

Dans le cas où $f \in \mathcal{CM}_{2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{R})$, l'inégalité devient :

$$\frac{a_0(f)^2}{4} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N}\left(a_n(f)^2 + b_n(f)^2\right) \leqslant \|f\|_2{}^2$$

Corollaire : Les séries suivantes sont toutes convergentes :

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} |c_n(f)|^2 \qquad \sum_{n\in\mathbb{N}} |c_{-n}(f)|^2 \qquad \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n(f)^2 \qquad \sum_{n\in\mathbb{N}^\star} b_n(f)^2$$

Et si $f \in \mathcal{CM}_{2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{R})$:

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n(f)|^2 = \frac{a_0(f)^2}{4} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}\left(a_n(f)^2 + b_n(f)^2\right)$$

Lemme 1 : Soit $f \in \mathcal{C}_{2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{C})$.

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists h \in \mathcal{C}_{2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{C}) \ / \ h \text{ est affine par morceaux et } \|f-h\|_\infty \leqslant \varepsilon$$

Lemme 2 : Théorème de Weirtrass trigonométrique : Soit $f \in \mathcal{C}_{2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{C})$. Alors :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists p \in \mathcal{P} \ / \ \|f-p\| \leqslant \varepsilon$$

Théorème : convergence en moyenne quadratique : Soit $f \in \mathcal{CM}_{2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{C})$. La série de Fourier de f converge en moyenne quadratique vers f i.e.

$$S_n(f) \xrightarrow{\|\cdot\|_2} f$$

Théorème : égalité de Bessel Parseval : $\forall f \in \mathcal{CM}_{2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{K})$,

$$\|f\|_2{}^2 = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n(f)|^2 \text{ si } \mathbb{K} = \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C}$$

$$\|f\|_2{}^2 = \frac{a_0(f)^2}{4} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}\left(a_n(f)^2 + b_n(f)^2\right) \text{ si } \mathbb{K} = \mathbb{R}$$

Proposition : Soient $f, g \in \mathcal{CM}_{2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{K})$.

$$(f \mid g) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \overline{c_n(f)} \cdot c_n(g) \text{ si } \mathbb{K} = \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C}$$

$$(f \mid g) = \frac{a_0(f)\cdot a_0(g)}{4} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}\left(a_n(f)\cdot a_n(g) + b_n(f)\cdot b_n(g)\right) \text{ si } \mathbb{K} = \mathbb{R}$$

16.5 Convergence normale pour les fonctions continues et $\mathcal{C}^1$ par morceaux 2π-périodiques à valeurs complexes

Proposition : Soit $f \in \mathcal{C}_{2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{C}) \cap \mathcal{C}^1\mathcal{M}_{2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{C})$. Alors les séries suivantes sont absolument convergentes :

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} c_n(f) \qquad \sum_{n\in\mathbb{N}} c_{-n}(f) \qquad \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n(f) \qquad \sum_{n\in\mathbb{N}} b_n(f)$$

Théorème : Si $f \in \mathcal{C}_{2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{C}) \cap \mathcal{C}^1\mathcal{M}_{2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{C})$, alors la série de Fourier converge normalement vers f.

Chapitre 17

Fonctions de plusieurs variables

17.1 Rappels de MPSI et synthèse

$f : I \to \mathbb{R},\ I \subset \mathbb{R}$:

$$f \text{ est dérivable en } a \in I \ \Leftrightarrow\ \exists A \in \mathbb{R} \ / \ \forall h \in \mathbb{R} \ / \ (a+h) \in I,\ f(a+h) = f(a) + A \cdot h + o(h)$$

On note $A = f'(a)$ et $df(a) : h \mapsto A \cdot h = f'(a) \cdot h$.
$df(a) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, $M_{\mathcal{C}_1} = \big(f'(a)\big)$.
$\overrightarrow{F} : \begin{cases} I \to \mathbb{R}^2 \\ t \mapsto \big(x(t), y(t)\big) \end{cases}$ notée $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$

$$\overrightarrow{F} \text{ est dérivable en } a \in I \Leftrightarrow\ x \text{ et sont dérivable en } a$$

$$\Leftrightarrow \exists (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 \ / \ \forall h \in \mathbb{R} \ / \ (a+h) \in I, \begin{cases} x(a+h) = x(a) + \alpha h + h\varepsilon_1(h) \\ y(a+h) = y(a) + \beta h + h\varepsilon_2(h) \end{cases}$$

On note $df(a) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^2)$ telle que $M_{\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2}(df(a)) = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$.
$f : U \to \mathbb{R}$ où U est un ouvert de $\mathbb{R}^2$. Pour $a = (x_0, y_0) \in U$,

$$\forall \vec{h} = (h_1, h_2) \in \mathbb{R}^2 \ / \ a + \vec{h} \in U,\ f(a + \vec{h}) = f(a) + \frac{\partial f}{\partial x}(a) \cdot h_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(a) \cdot h_2 + o(\|h\|)$$

On note $df(a) : \begin{cases} \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \\ (h_1, h_2) \mapsto \dfrac{\partial f}{\partial x}(a) \cdot h_1 + \dfrac{\partial f}{\partial y}(a) \cdot h_2 \end{cases}$.

$$df(a) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}) : M_{\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2}\Big(df(a)\Big) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x}(a) & \dfrac{\partial f}{\partial y}(a) \end{pmatrix}$$

$\overrightarrow{F} : U \to \mathbb{R}^2$ où U est un ouvert de $\mathbb{R}^2$. Soit $a = (x_0, y_0)$. $\overrightarrow{F}(a) = (f_1(x_0, y_0), f_2(x_0, y_0))$. Soit $\overrightarrow{h} = (h_1, h_2)$ tel que $a + \overrightarrow{h} \in U$.

$$\overrightarrow{F}(x_0 + h_1, y_0 + h_2) = \overrightarrow{F}(x_0, y_0) + \underbrace{\begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x}(a) & \dfrac{\partial f_1}{\partial y}(a) \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x}(a) & \dfrac{\partial f_2}{\partial y}(a) \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix}}_{d\overrightarrow{F}(a)(h_1, h_2)} + \|\overrightarrow{h}\| \cdot \overrightarrow{\varepsilon(\overrightarrow{h})}$$

Ainsi $d\overrightarrow{F}(a) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$.

17.2 Fonctions différentiables

Définition : différentielle Soit $f : U \to F$ où U est un ouvert de E, E et F étant des $\mathbb{R}$-espaces vectoriel de dimensions finies. Soit $a \in U$.
On dit que f est différentiable en a s'il existe une application $\varphi \in \mathcal{L}(E, F)$ telle que :

$$\forall h \in E \ / \ (a+h) \in U, \ f(a+h) = f(a)\varphi(h) + o\left(\|h\|\right)$$

On note $df(a)$ la fonction φ : on l'appelle la différentielle de f au pouint a.

Propriété : L'application φ définie précédement, si elle existe, est unique.

17.3 Dérivées partielles

Définition : dérivée selon un vecteur : Soit $f : U \to F, \ a \in U, \ \overrightarrow{u} \in E \ / \ \overrightarrow{u} \neq O_E$. Soit $\varphi_{a,\overrightarrow{u}} : \begin{cases}]-r, r[\to F \\ t \mapsto f(a + t\overrightarrow{u}) \end{cases}$ (un tel $r > 0$ existe).

On appelle dérivée de f au point a selon le vecteur $\overrightarrow{u}$ le nombre $D_{\overrightarrow{u}} f(a) = \varphi'_{a,\overrightarrow{u}}(0) \left(\underset{\text{aussi}}{\overset{\text{notée}}{=}} \dfrac{\partial f}{\partial u} \right)$.

$$D_{\overrightarrow{u}} f(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a + h\overrightarrow{u}) - f(a)}{h}$$

Définition : dérivées partielles : Soit $f : U \to F$ où U ouvert de E, E et F étant deux $\mathbb{R}$-espaces vectoriels de dimensions finies. Soit $a \in U$. Soit $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_q)$ une base de E.
La dérivées de f en a selon $\overrightarrow{e_j}$ s'appelle la dérivée partielle d'indice j au point a et est notée $D_j(a)$, ainsi,

$$D_j(f(a)) = D_{\overrightarrow{e_j}} f(a)$$

Si $E = \mathbb{R}^q$ et si $\mathcal{B} = \mathcal{C}_q$, base canonique de $\mathbb{R}^q$, on notera $\dfrac{\partial .}{\partial x_j}$ au lieu de $D_j f$.
Les dérivées partielles en a sont les coordonées de $df(a)$ dans la base duale.

Théorème : Soit $f : U \to F, \ a \in U$. Si f est différentiable en a, alors f admet selon tout vecteur $\overrightarrow{u}$ non nul une dérivée égale à :

$$D_{\overrightarrow{u}} f(a) = df(a)(\overrightarrow{u})$$

Définition : matrice jacobienne : Soit $f : U \subset E \to F, \ a \in U$. Soient $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_q)$, (resp. $\mathcal{C} = (v_1, \ldots, v_p)$ une base de E (resp. une base de F).
On suppose que f admet des dérivées partielles (relativement à ces bases) au point a. On appelle matrice jacobienne de f au point a relativement aux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ la matrice :

$$\mathcal{J}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f)(a) = \Big(D_j(f_i)(a) \Big)_{i,j}$$

Si $E = \mathbb{R}^q$ et $F = \mathbb{R}^p$, si on choisit les bases canoniques, on note :

$$\mathcal{J}_{\mathcal{B}}(f)(a) = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a) \right)$$

où f_i fonction i^{e} coordonnée de f dans $(v_i)_{i=1..p}$.

Proposition : Si f est différentiable au point a, alors $\mathcal{J}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f)(a) = M_{\mathcal{B},\mathcal{C}}\Big(df(a)\Big)$.

Définition : jacobien : Si $f : U \subset E \to E$ et si $a \in U$, on appelle jacobien de f en a relativement à la base $\mathcal{B}$ de E le déterminant de $\mathcal{J}_{\mathcal{B}}(f)(a)$ noté $\operatorname{jac}(f)(a)$. En particulier, si $E = R^n$,

$$\operatorname{jac}(f)(a) = \det\left(\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a)\right)_{i,j}\right) \underset{\text{aussi}}{\overset{\text{notée}}{=}} \frac{\partial(f_1,\dots,f_n)}{\partial(x_1,\dots,x_n)}(a)$$

17.4 Fonctions de classe $\mathcal{C}^1$

Définition : Soit $f : U \subset E \to F$. Soit $\mathcal{B} = (e_j)_{j=1..q}$ une base de E.
On dit que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur U et on écrit $f \in \mathcal{C}^1(U,F)$ si elle admet des fonctions dérivées partielles sur U continues i.e. $\forall j \in [\![1,q]\!],\ D_j f$ est définie en tout point de U et est continue.

Théorème : Toute fonction différentiable en a est continue en a.

Théorème : Tout application de classe $\mathcal{C}^1$ sur U est différentiable sur U.

Proposition : Si $f \in \mathcal{C}^1(U,F)$, pour tout $u \in E \setminus \{O_E\}$, la fonction $D_{\overrightarrow{u}}(f)$ est continue sur U.

17.5 Composition de fonctions

Rappel de Sup

- $\begin{array}{ccccc} I \subset \mathbb{R} & \xrightarrow{\varphi} & J & \xrightarrow{f} & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \varphi(t) & \mapsto & f(\varphi(t)) \end{array}$. Si $\varphi \in \mathcal{D}(I,J)$ et $f \in \mathcal{D}(J,\mathbb{R})$, alors $(f\circ\varphi) \in \mathcal{D}(I,\mathbb{R})$ et $\forall t \in I$,

$$(f\circ\varphi)'(t) = f'\big(\varphi(t)\big) \times \varphi'(t)$$

- $\begin{array}{ccccc} I \subset \mathbb{R} & \xrightarrow{\varphi} & U \subset \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{f} & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \varphi(t) & \mapsto & f(\varphi(t)) \end{array}$, $\varphi(t) = \big(x(t), y(t)\big)$. $F = f\circ\varphi)$.

$$F'(t) = \frac{\partial f}{\partial x}\big(\varphi(t)\big) \times x'(t) + \frac{\partial f}{\partial y}\big(\varphi(t)\big) \times y'(t)$$

  Remarque : la matrice jacobienne de f au point $\varphi(t)$ est : $\begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}\big(\varphi(t)\big) & \frac{\partial f}{\partial y}\big(\varphi(t)\big) \end{pmatrix}$ et celle de φ au point t est $\big(\varphi'(t)\big)$ et celle de $F = (f\circ\varphi)$ est :

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}\big(\varphi(t)\big) & \frac{\partial f}{\partial y}\big(\varphi(t)\big) \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix}$$

  i.e. $\mathcal{J}(f\circ\varphi)(t) = \mathcal{J}(f)\big(\varphi(t)\big) \times \mathcal{J}(\varphi)(t)$ et ainsi,

$$d(f\circ\varphi)(t) = df\big(\varphi(t)\big) \circ d\varphi(t)$$

- $\begin{array}{ccccc} V \subset \mathbb{R}^2 & \overset{\Phi}{\to} & U \subset \mathbb{R}^2 & \overset{f}{\to} & \mathbb{R} \\ (u,v) & \mapsto & \big(x(u,v), y(u,v)\big) & \mapsto & f\,(x,y) \end{array}$, $\Phi(u,v) = \big(x(u,v), y(u,v)\big)$. $F = f \circ \Phi$.

$$\frac{\partial F}{\partial u}(u,v) = \frac{\partial f}{\partial x}\big(\Phi(u,v)\big) \times \frac{\partial x}{\partial u}(u,v) + \frac{\partial f}{\partial y}\big(\Phi(u,v)\big) \times \frac{\partial y}{\partial u}(u,v)$$

$$\frac{\partial F}{\partial v}(u,v) = \frac{\partial f}{\partial x}\big(\Phi(u,v)\big) \times \frac{\partial x}{\partial v}(u,v) + \frac{\partial f}{\partial y}\big(\Phi(u,v)\big) \times \frac{\partial y}{\partial v}(u,v)$$

Remarque :

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial F}{\partial u}(u,v) & \frac{\partial F}{\partial v}(u,v) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u}(u,v) & \frac{\partial x}{\partial v}(u,v) \\ \frac{\partial y}{\partial u}(u,v) & \frac{\partial y}{\partial v}(u,v) \end{pmatrix}$$

i.e. $\mathcal{J}(F)(u,v) = \mathcal{J}(f)(x,y) \times \mathcal{J}(\Phi)(u,v)$ et ainsi,

$$d(f \circ \Phi)(a) = df\big(\Phi(a)\big) \circ d\Phi(a)$$

- $\begin{array}{ccccc} U \subset \mathbb{R}^2 & \overset{\Phi}{\to} & \mathbb{R} & \overset{f}{\to} & \mathbb{R} \\ (u,v) & \mapsto & \Phi(u,v) & \mapsto & f\big(\Phi((u,v))\big) \end{array}$.

$$\frac{\partial F}{\partial u}(u,v) = f'\big(\Phi(u,v)\big) \times \frac{\partial \Phi}{\partial u}(u,v)$$

$$\frac{\partial F}{\partial v}(u,v) = f'\big(\Phi(u,v)\big) \times \frac{\partial \Phi}{\partial v}(u,v)$$

Remarque :

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial F}{\partial u}(u,v) & \frac{\partial F}{\partial v}(u,v) \end{pmatrix} = \big(f'(x)\big) \times \begin{pmatrix} \frac{\partial \Phi}{\partial u}(u,v) & \frac{\partial \Phi}{\partial v}(u,v) \end{pmatrix}$$

i.e. $\mathcal{J}(F)(u,v) = \mathcal{J}(f)(\Phi(u,v)) \times \mathcal{J}(\Phi)(u,v)$ et ainsi,

$$d(f \circ \Phi)(a) = df\big(\Phi(a)\big) \circ d\Phi(a)$$

Théorème : Soient $f : U \subset E \to V \subset F$ et $g : V \subset F \to G$.
Si $f \in \mathcal{C}^1(U,V)$ et $g \in \mathcal{C}^1(V,G)$, alors $g \circ f \in \mathcal{C}^1(U,G)$ et

$$\forall a \in U,\ d(g \circ f)(a) = \Big(dg\big(f(a)\big)\Big) \circ \Big(df(a)\Big)$$

Matrice jacobienne de la fonction réciproque : Soit $f : U \subset E \to V \subset E$ un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme.

$$\forall b \in V,\ df^{-1}(b) = \Big(df\big(f^{-1}(b)\big)\Big)^{-1}$$

$$\mathcal{J}_{\mathcal{B}}\left(f^{-1}\right)(b) = \Big(\mathcal{J}_{\mathcal{B}}(f)\big(f^{-1}(b)\big)\Big)^{-1}$$

$$\operatorname{jac}\left(f^{-1}\right)(b) = \frac{1}{\operatorname{jac}(f)\left(f^{-1}(b)\right)}$$

17.6 Dérivées partielles d'ordre supérieure

Définition : fonction de classe $\mathcal{C}^2$: Soit $f \in \mathcal{C}^1(U, F)$, $U \subset E$. Soit $(e_j)_{j=1..q}$ une base de E. Alors $D_j(f) = D_{e_j}(f)$ est aussi une application de U dans F.
Si toutes les fonctions $D_i\big(D_j(f)\big)$, $(i, j) \in [\![1, q]\!]^2$ existent et sont continues, on dit que f est de classe $\mathcal{C}^2$ et on note $D^2_{i,j}(f) = D_i\big(D_j(f)\big)$.

Définition : fonction de classe $\mathcal{C}^k$: Pour $k \geqslant 2$, f est de classe $\mathcal{C}^k$ si et seulement si f est de classe $\mathcal{C}^1$ et $\forall i \in [\![1, q]\!]$, $D_i(f) \in \mathcal{C}^{k-1}(U, F)$.

Théorème : théorème de Schwarz : Si $f \in \mathcal{C}^2(U, F)$,

$$\forall i, j \in [\![1, q]\!]^2,\ D_j\big(D_i(f)\big) = D_i\big(D_j(f)\big)$$

Notamment pour $E = \mathbb{R}^n$, $F = \mathbb{R}$, si $f \in \mathcal{C}^2(U, \mathbb{R})$,

$$\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right) = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right)$$

17.7 Cas des fonctions à valeurs réelles

Définition : Soit $f \in \mathcal{C}^1(U, \mathbb{R})$ où U est un ouvert de E, E étant un espace vectoriel euclidien. Soit $a \in U$.
L'unique vecteur u_a tel que $df(a) = (u_a \mid .)$ s'appelle le vecteur gradient de f au point a et est noté $\overrightarrow{grad}f(a)$.

$$\forall x \in E, df(a)(x) = \left(\overrightarrow{grad}f(a) \mid x\right)$$

Dans E euclidien muni d'une base $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ orthonormée :

$$\overrightarrow{grad}f(a) = \sum_{i=1}^{n} D_i f(a) \cdot e_i \text{ i.e. } \overrightarrow{grad}f(a) = (D_1 f(a), \ldots, D_n f(a))_{\mathcal{B}}$$

Dans $\mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire usuel, dans la base canonique :

$$\overrightarrow{grad}f(a) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} \cdot e_i \text{ i.e. } \overrightarrow{grad}f(a) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}(a), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(a)\right)$$

$$\mathcal{J}_{\mathcal{C}}(f)(a) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(a)\right) \in \mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{R})$$

$$df(a) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) dx_i$$

Application au coordonnées cartésiennes - polaires : Soit $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x, y) & \mapsto & f(x, y) \end{array}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.
Pour ρ et $\theta \in \mathbb{R}$, on pose $F(\rho, \theta) = f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)$. F est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ avec $\forall \rho, \theta \in \mathbb{R}$:

- $\dfrac{\partial F}{\partial \rho}(\rho, \theta) = \cos\theta \dfrac{\partial f}{\partial x}(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta) + \sin\theta \dfrac{\partial f}{\partial y}(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)$
- $\dfrac{\partial F}{\partial \theta}(\rho, \theta) = -\rho\sin\theta \dfrac{\partial f}{\partial x}(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta) + \rho\cos\theta \dfrac{\partial f}{\partial y}(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)$

Lemme : Soit U un ouvert convexe de E espace vectoriel normé. Soit $f \in \mathcal{C}^1(U, \mathbb{R})$. Soient $a, b \in U$. Alors :

$$f(b) - f(a) = \int_0^1 df\big((1-t)a + tb\big)(b-a)dt$$

Théorème 1 : Soit $f \in \mathcal{C}^1(U, \mathbb{R})$ où U est un ouvert convexe de E, E étant un espace vectoriel normé de dimension finie. Alors :

$$\forall a, b \in U, \ |f(a) - f(b)| \leqslant \|b - a\| \times \underset{x \in [a,b]}{\text{Max}} \left(|||df(a)|||\right)$$

Théorème 2 : Soit $f \in \mathcal{C}^1(U, \mathbb{R})$ où U est un ouvert convexe de E, E étant un espace vectoriel euclidien. Alors :

$$\forall a, b \in U, \ |f(b) - f(a)| \leqslant \|b - a\| \times \underset{x \in [a,b]}{\text{Max}} \left(\left\|\overrightarrow{grad}(f)(x)\right\|\right)$$

Corollaire : Soit $f \in \mathcal{C}^1(U, \mathbb{R})$ où U est un ouvert de E.

$$f \text{ constante } \Leftrightarrow df = 0$$

Définition : extremum : Soit $f : U \to \mathbb{R}$ avec E un espace vectoriel normé et U ouvert de E.
On dit que f admet un maximum (resp. un minimum) local en $a \in U$ s'il existe $r > 0$ / $\forall x \in \mathcal{B}(a, r), \ f(x) \leqslant f(a)$ (resp.$f(x) \geqslant f(a)$).

Définition : Soient $f \in \mathcal{C}^1(U, \mathbb{R})$ et $a \in U$. On dit parfois que f présente en a un point critique (ou extremum potentiel) si :

$$df(a) = 0$$

Théorème : Soit $f \in \mathcal{C}^1(U, \mathbb{R})$ avec U un ouvert de E. Soit $a \in E$.
Si f présente en a un extremum local, nécessairement $df(a) = 0$.

Conséquence : Si $f \in \mathcal{C}^1(\Delta, \mathbb{R})$, avec Δ non nécessairement ouvert, les extremums de f sont :
- soit des points de la frontière ;
- soit des points de $\mathring{\Delta}$ pour lesquels toutes dérivées partielles sont nulles.

Théorème : Soit $f \in \mathcal{C}^2(U, \mathbb{R})$ où U est un ouvert de $\mathbb{R}^2$. Soit $(x_0, y_0) \in U$. Soit $(h, k) \in \mathbb{R}^2$ / $(x_0 + h, y_0 + k) \in U$. Alors :

$$\begin{aligned} f(x_0 + h, y_0 + k) = \ & f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \cdot h + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \cdot k \\ & + \frac{1}{2!} \cdot \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) \cdot h^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) \cdot h \cdot k + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0) \cdot k^2 \right) + o\left(\|(h, k)\|^2\right) \end{aligned}$$

Théorème : Soit $f \in \mathcal{C}^2(U, \mathbb{R})$ où U est un ouvert de $\mathbb{R}^2$. Soit $(x_0, y_0) \in U$ tel que $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0$. Soit :

$$r = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) \qquad s = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) \qquad t = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0)$$

1. Si $r \cdot t - s^2 > 0$, f présente un extremum en (x_0, y_0) :
   - si $r > 0$, c'est un minimum ;
   - si $r < 0$, c'est un maximum ;
2. Si $r \cdot t - s^2 > 0$, f ne présente pas en (x_0, y_0) un extremum mais présente un point selle.

Équation aux dérivées partielles On cherche à résoudre des équations aux dérivées partielles i.e. chercher les fonctions $f \in \mathcal{C}^1(U, \mathbb{R})$ où U est un ouvert de $\mathbb{R}^2$, qui vérifie une équation (E) comportant $f, \dfrac{\partial f}{\partial x}, \dfrac{\partial f}{\partial y}$.

Chapitre 18

Équations différentielles linéaires

18.1 Rappels de 1re année

Résolution d'une équation différentielle linéaire de la forme de (E)

$$(E) : y' = a(x) \cdot y + b(x),\ a, b \in \mathcal{C}(I, \mathbb{R})$$

L'ensemble solution de l'équation homogène associée :

$$\mathcal{S}^\star = \left\{ Y : \begin{array}{l} I \to \mathbb{R} \\ x \mapsto C \cdot e^{A(x)} \end{array} c \in \mathbb{R}, A \text{ une primitive de a} \right\}$$

Cas général :

$$\mathcal{S} = \left\{ y : \begin{array}{l} I \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \tilde{y}(x) + C \cdot e^{A(x)} \end{array} C \in \mathbb{R}, A \text{ une primitive de a, } \tilde{y} \text{ est une solution particulière} \right\}$$

Problème de Cauchy : un théorème dit de Cauchy énonce l'existence d'une et une seule solution au problème suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} y' = a(x) \cdot y + b(x),\ a, b \in \mathcal{C}(I, \mathbb{R}) \\ y(x_0) = y_0 \end{array} \right. ,\ x_0 \in I,\ y_0 \in \mathbb{R}$$

Résolution d'une équation différentielle linéaire de la forme de (E')

$$(E) : a(x) \cdot y' = b(x) \cdot y + c(x),\ a, b, c \in \mathcal{C}(I, \mathbb{R})$$

On se ramène au premier cas en divisant par $a(x)$ mais il y a un problème si a s'annule. On résout alors (E') sur chacun des intervalles où a ne s'annule pas.
On essaie ensuite de raccorder aux points x_0 où a s'annule.
Aux points à problème, il doit y avoir continuité de la fonction solution, elle doit y être dérivable et une fois ces conditions vérifiées, on s'assure que (E') reste vraie pour $x = 0$.

18.2 Équations différentielles linéaires d'ordre 1

Notation

- $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$;
- F désigne un espace vectoriel normé de dimension finie (pratiquement, $F = \mathbb{R}, \mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$) ;
- Dans $\mathcal{L}(F)$, si $u \in \mathcal{L}(F)$ et $x \in F$, on note $u.x$ plutôt que $u(x)$.
  Comme $\begin{array}{l} \mathcal{L}(E) \times F \\ (u, x) \mapsto u.x \end{array}$ est bilinéaire, si $a \in \mathcal{D}(I, \mathcal{L}(F))$ et si $\varphi \in \mathcal{D}(I, F)$, en notant $a.\varphi : \left\{ \begin{array}{l} I \to F \\ t \mapsto a(t).\varphi(t) \end{array} \right.$, alors $a.\varphi \in \mathcal{D}(I, F)$ et $(a.\varphi)' = a'.\varphi + a.\varphi'$.

Définition 1 : équation différentielle linéaire du premier ordre : On appelle équation différentielle linéaire du premier ordre toute équation du type :

$$(E) : x' = a.x + b$$

où $a \in \mathcal{C}\big(I, \mathcal{L}(F)\big)$ et $b \in \mathcal{C}(I, F)$.

Définition 2 : solution de l'équation différentielle linéaire : Une solution de l'équation différentielle linéaire (E) est une fonction $\varphi \in \mathcal{D}(I, F)$ telle que :

$$\forall t \in I,\ \varphi'(t) = a(t).\varphi(t) + b(t)$$

Définition 3 : problème de Cauchy : On appelle problème de Cauchy tout problème du type :

$$\begin{cases} x' = a.x + b\ (E) \\ x(t_0) = y_0\ (C.I.) \end{cases}$$

où $a \in \mathcal{C}\big(I, \mathcal{L}(F)\big),\ b \in \mathcal{C}(I, F),\ t_0 \in I$ et $x_0 \in F$.

Propriété : Si φ est solution de $(E) : x' = a(t).x + b(t)$ (où a et b sont continues sur I), alors $\varphi \in \mathcal{C}^1(I, F)$. Ainsi, toute solution d'une équation différentielle linéaire du premier ordre est de classe $\mathcal{C}^1$.
Prolongement : si a et b sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ alors φ sera de classe $\mathcal{C}^\infty$.

Propriétés algébriques : Notons $\mathcal{S}$ l'ensemble solution de (E) une équation différentielle linéaire du premier ordre et $\mathcal{S}^\star$ l'ensemble solution de l'équation différentielle homogène associée. $\mathcal{S} = \tilde{x} + \mathcal{S}^\star$ est un espace affine de même dimension que $\mathcal{S}^\star$ avec $\tilde{x}$ une solution particulière de (E).

Proposition : principe de superposition : Soient $(E_1) : x' = a.x + b_1,\ (E_2) : x' = a.x + b_2$ et $(E) : x' = a.x + b1 + b_2$ et $\mathcal{S}_1,\ \mathcal{S}_2$ et $\mathcal{S}$ les ensembles solutions associés.
Si $x_1 \in \mathcal{S}_1$ et $x_2 \in \mathcal{S}_2$, alors :

$$\forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2,\ \alpha \cdot x_1 + \beta \cdot x_2 \in \tilde{\mathcal{S}} \text{ où } (\tilde{E}) : x' = a.x + (\alpha \cdot b1 + \beta \cdot b_2)$$

Théorème : théorème de Cauchy-Lipschitz : Soit $(E) : x' = a(t).x + b(t)$ où $a \in \mathcal{C}\big(I, \mathcal{L}(F)\big),\ b \in \mathcal{C}(I, F)$ avec F un espace vectoriel normé de dimension finie. Le problème de Cauchy :

$$\begin{cases} (E) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \quad \text{où } t_0 \in I,\ x_0 \in F$$

admet une et une seule solution.

Théorème : Les solutions de l'équation différentielle linéaire homogène $(E^\star) : x' = a(t).x$ où $a \in \mathcal{C}\big(I, \mathcal{L}(F)\big)$ constituent un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de même dimension que F i.e. $\dim \mathcal{S}^\star = \dim F$.

Définition : système fondamental de solutions : On appelle système fondamental de solutions de $(E^\star)$ toute base $(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ où $n = \dim F$ constituées de solution de $(E^\star) : y' = a(x).y$.

Définition : wronskien : Soient $(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ une famille de fonction de I à valeurs dans F un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n de base $\mathcal{B}$. On appelle wronskien de $(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ l'application :

$$W_{\mathcal{B}} : \begin{array}{lcl} I & \to & \mathbb{K} \\ t & \mapsto & \det\limits_{\mathcal{B}}(\varphi_1(t), \ldots, \varphi_n(t)) \end{array}$$

Proposition fondamentale : Soit $(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ n éléments de $\mathcal{S}^\star$ espace solution de $(E^\star)$: $x' = a(t).x$ où $a \in \mathcal{C}\big(I, \mathcal{L}(F)\big)$. Les trois affirmations suivantes sont équivalentes :

1. $(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ est un système fondamental de solutions de $\mathcal{S}^\star$;
2. $\exists t_0 \in I \ / \ W(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)(t_0) \neq 0$;
3. $\forall t \in I, \ W(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)(t) \neq 0$.

Lemme : Soit $(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ un système fondamental de solutions de $(E^\star)$: $x' = a(t).x$. Soit $\varphi \in \mathcal{C}(I, F)$, $n = \dim F$. Alors :

$$\exists \, (\lambda_i)_{i \in [\![1,n]\!]} \in \mathcal{C}(I, \mathbb{K}) \ / \ \varphi = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \varphi_i$$

Et de plus, si $\varphi \in \mathcal{C}^1(I, F)$, alors $\forall i \in [\![1, n]\!], \ \lambda_i \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{K})$.

Théorème : Soit $(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ un système fondamental de solutions de $(E^\star)$: $x' = a(t).x$ avec $a \in \mathcal{C}\big(I, \mathcal{L}(F)\big)$. Soit (E) : $x' = a(t).x + b(t)$ où $b \in \mathcal{C}(I, F)$. Soient $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathcal{C}(I, F) \ / \ b = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \varphi_i$. Soit $\varphi \in \mathcal{C}^1(I, F)$ et soient $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathcal{C}^1(I, F) \ / \ \varphi = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \varphi_i$.

$$\varphi \text{ est solution de } (E) \Leftrightarrow \forall i \in [\![1, n]\!], \ \lambda_i' = \alpha_i$$

18.3 Équations différentielles linéaires à coefficients constants

Plus précisement, dans (E) : $x' = a(t).x + b(t)$, a est constante.

Proposition : problème de Cauchy : La seule solution du problème de Cauchy

$$\begin{cases} x' = a.x \\ x(t_0) = v \end{cases} \quad \text{où } a \in \mathcal{L}(F), \ t_0 \in I, \ v \in F$$

est l'application $t \mapsto \exp\big((t - t_0) \cdot a\big).v$.

Théorème : Soit $(E^\star)$: $x' = a.x$ où $a \in \mathcal{L}(F)$. Soit $(v_1, \ldots, v_n)$ une famille de n vecteurs de F. Soit $\varphi_i : \begin{array}{lcl} \mathbb{R} & \to & F \\ t & \mapsto & \exp(t \cdot a).v \end{array}$

Propriétés : exp **:**

- Si $(\mathcal{A}, +, \times, \cdot)$ est une algèbre, $\forall u \in \mathcal{A}, \ \exp u = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{u^n}{n!}$;
- Si a et b deux éléments de $\mathcal{A}$ commutent, $\exp(a + b) = \exp(a) \times \exp(b)$;
- $\exp(0_{\mathcal{A}} = 1_{\mathcal{A}}$;
- $\forall a \in \mathcal{L}(F), \ \forall (t, s) \in I^2, \ \exp\big((t + s) \cdot a\big) = \exp(t \cdot a) \circ \exp(s \cdot a)$;

- $\exp\left(0_{\mathcal{L}(F)}\right) = Id_F$;
- $\forall a \in \mathcal{L}(F),\ \forall t \in I,\ \exp(t \cdot a) \in GL(F)$;
- $\forall a \in \mathcal{L}(F),\ \forall a \in I,\ a$ et $\exp(t \cdot a)$ commutent.

Proposition : exponentielle de matrice :
- Si $\Delta = \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n),\ \exp(\Delta) = \operatorname{diag}(e^{\lambda_1}, \dots, e^{\lambda_n})$;
- Si A est diagonalisable, $\exists P \in GL_n(\mathbb{R})\ /\ A = P \cdot \Delta \cdot P^{-1}$ avec Δ diagonale. Alors $\exp(A) = P \cdot \exp(\Delta) \cdot P^{-1}$
- Si A est nilpotente d'indice p, $\exp(t \cdot a) = \displaystyle\sum_{n=0}^{p-1} \frac{(t \cdot A)^n}{n!}$

18.4 Systèmes différentiels linéaires

On résout ici $X' = A \cdot X + B(t)$ où $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}),\ B \in \mathcal{C}(I, \mathbb{K}^n)$.

Cas où A est diagonalisable : Notons λ_j les valeurs propres de A et v_j leurs vecteurs propres associés.

$$\varphi(t) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \cdot e^{\lambda_j \cdot t} \cdot v_j$$

φ est une solution de $(E^\star)$ avec $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{K}^n$.

Cas où A est triangulaire : On a un système de la forme $\left\{\begin{array}{ccccccc} x' & = & x & + & y & + & z \\ y' & = & & & y & + & z \\ z' & = & & & & & z \end{array}\right.$ que l'on résout à l'aide de la méthode du pivot de Gauss.

Cas où Card$\big(Sp(A)\big) = 1$ et A non diagonalisable : On cherche une matrice N dépendant de A tel que N est nilpotente. Il faut ensuite calculer $\exp(t \cdot A)$. Les solutions de $(E^\star)$ s'écrivent : $t \mapsto \exp(t \cdot A) \cdot v$ où $v = (\alpha, \beta, \gamma)$ quelconque.

18.5 Équations différentielles linéaires (scalaires) d'ordre 2

Définition 1 : Une équation différentielle linéaire d'ordre 2 est une équation du type :

$$(E) : a(t) \cdot x'' + b(t) \cdot x' + c(t) \cdot x = d(t)$$

où $a, b, c, d \in \mathcal{C}(I, \mathbb{K})$.

Définition 2 : Une solution de (E) est une fonction φ deux fois dérivable de I dans $\mathbb{K}$ telle que :

$$\forall t \in I,\ a(t) \cdot \varphi''(t) + b(t) \cdot \varphi'(t) + c(t) \cdot \varphi(t) = d(t)$$

Définition 3 : On appelle problème de Cauchy tout problème du type :

$$\left\{\begin{array}{l} (E) \\ x(t_0) = x_0,\ x'(t_0) = v_0 \end{array}\right. \quad \text{où} \ \ t_0 \in I,\ x_0, v_0 \in \mathbb{K}$$

Proposition : Soit $(E) : a(t) \cdot x'' + b(t) \cdot x' + c(t) \cdot x = d(t)$ avec $a, b, c, d \in \mathcal{C}(I, \mathbb{K})$. Soit $(E^\star) : (E) : a(t) \cdot x'' + b(t) \cdot x' + c(t) \cdot x = 0$ l'équation homogène associée. Soient $\mathcal{S}$ et $\mathcal{S}^\star$ les espaces solutions respectifs de (E) et $(E\star)$. Alors :

- $\mathcal{S}^\star$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel ;
- $\mathcal{S}$ est ou bien vide ou bien un $\mathbb{K}$-espace affine i.e. $\exists \tilde{x} \in \mathcal{S}^\star \;/\; \mathcal{S} = \tilde{x} + \mathbb{S}^\star$.

Propriété : Si a ne s'annule pas sur I, toute solution de (E) est nécessairement ce classe $\mathcal{C}^2$ sur I.

Théorème : Le problème de Cauchy :

$$\begin{cases} x'' + \dfrac{b(t)}{a(t)} \cdot x' + \dfrac{c(t)}{a(t)} \cdot x = \dfrac{d(t)}{a(t)} \\ x(t_0) = x_0,\ x'(t_0) = v_0 \end{cases} \quad \text{où} \quad t_0 \in I,\ x_0, v_0 \in \mathbb{K}$$

admet une et une seule solution.

Proposition : $\Psi_{t_0} : \begin{array}{ccc} \mathcal{S}^\star & \to & \mathbb{K}^2 \\ x & \mapsto & \big(x(t_0), x'(t_0)\big) \end{array}$ est un isomorphisme.

Théorème :

$$\dim \mathcal{S}^\star = 2$$

Définition 4 : On appelle système fondamental de solutions toute base (φ_1, φ_2) de $\mathcal{S}^\star$.

Définition : wronskien : Soit $(E^\star) : a(t) \cdot x'' + b(t) \cdot x' + c(t) \cdot x = 0$ où $a, b, c, d \in \mathcal{C}(I, \mathbb{K})$. Soit φ_1, φ_2 deux solutions de $(E^\star)$. On appelle wronskien de (φ_1, φ_2) l'application :

$$W(\varphi_1, \varphi_2) : \begin{cases} I & \to & \mathbb{K} \\ t & \mapsto & \begin{vmatrix} \varphi_1(t) & \varphi_2(t) \\ \varphi_1'(t) & \varphi_2'(t) \end{vmatrix} \end{cases}$$

Théorème : Soit $(E^\star) : a(t) \cdot x'' + b(t) \cdot x' + c(t) \cdot x = 0$ où $a, b, c, d \in \mathcal{C}(I, \mathbb{K})$, a ne s'annulant pas sur I. Alors les trois affirmations suivantes sont équivalentes pour deux solutions φ_1, φ_2 de $(E^\star)$:

1. (φ_1, φ_2) est un système fondamental de solutions ;
2. $\exists t_0 \in I \;/\; W(\varphi_1, \varphi_2)(t_0) \neq 0$;
3. $\forall t \in I,\ W(\varphi_1, \varphi_2) \neq 0$.

Recherche de solutions :

- recherche de solutions particulières de la même forme que a, b et c ;
- recherche de solutions développables en série entière ;
- recherche par méthode de variation de la constante ;
- recherche par méthode de variation des constantes.

Méthode de variation de la constante : Une fois une première solution φ de $(E^\star)$ trouvé, on pose $x(t) = \varphi(t) \cdot z(t)$. On doit supposer que φ ne s'annule pas pour pouvoir écrire réciproquement $z = \dfrac{x}{\varphi}$. Il faut ensuite reporter dans (E). On trouve une équation différentielle du premier ordre en z' que l'on résout en posant $Z = z'$. Ainsi, $x = C \cdot \varphi \displaystyle\int \psi_1 + D \cdot \varphi$ avec $C, D \in \mathbb{K}$ et $Z = C \cdot \psi_1$.

Méthode de variation des deux constantes : On cherche un système fondamental de solutions de $(E^\star)$ notées (φ_1, φ_2). On cherche alors une solution particulière $\tilde{x}$ de (E) sous la forme $\tilde{x} = \lambda_1 \cdot \varphi_1 + \lambda_2 \cdot \varphi_2$ où les dérivées de λ_1 et λ_2 vérifient le système : $\left\{ \begin{array}{l} \lambda_1' \cdot \varphi_1 + \lambda_2' \cdot \varphi_2 = 0 \\ \lambda_1' \cdot \varphi_1' + \lambda_2' \cdot \varphi_2' = \dfrac{d(t)}{a(t)} \end{array} \right.$.

On obtient λ_1' et λ_2' par résolution du système de Cramer puis λ_1 et λ_2 par recherche de primitive. On a donc l'expression de $\tilde{x} = \lambda_1 \cdot \varphi_1 + \lambda_2 \cdot \varphi_2$. D'où :

$$\mathcal{S}_{\mathcal{E}} = \left\{ \begin{array}{ccc} I & \to & \mathbb{K} \\ t & \mapsto & \tilde{x}(t) + \alpha_1 \cdot \varphi_1 + \alpha_2 \cdot \varphi_2 \end{array} ,\ (\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{K}^2 \right\}$$

Chapitre 19

Courbes et surfaces

19.1 Courbe paramétrée

Vocabulaire :

- on appelle arc paramétré de classe $\mathcal{C}^1$ du plan toute fonction $\overrightarrow{f} : I \to \mathbb{R}^2$ où I est un intervalle de $\mathbb{R}$ et $\overrightarrow{f} \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R}^2)$. On parle souvent de l'arc $\Gamma = \left(I, \overrightarrow{f}\right)$;
- on appelle support de l'arc l'image de I par $\overrightarrow{f}$.
- notation : $\overrightarrow{f}(t) = \overrightarrow{OM}(t)$. Selon le contexte, $\big(x(t), y(t)\big)$ représente le point $M(t)$ ou le vecteur $\overrightarrow{OM}(t)$.
- on appelle arc simple tout arc paramétré dont $\overrightarrow{f}$ est injective ;
- on appelle arc simple fermé tout arc paramétré tel que : $I = [a, b]$, $\overrightarrow{f}(a) = \overrightarrow{f}(b)$ et $f_{|]a,b[}$ est injective ;
- paramétrage admissible : soit (I, f) et (J, g) deux arcs paramétrées. On dit que (J, g) est un paramétrage admissible de classe $\mathcal{C}^k$ de (I, f) s'il existe un $\mathcal{C}^k$-difféomorphisme φ de I sur J tel que $f = g \circ \varphi$. Une telle application φ est appelée un changement de paramétrage de classe $\mathcal{C}^k$. Les deux arcs ont le même support ;
- on appelle point régulier tout point $M = \overrightarrow{f}(t)$ tel que $\overrightarrow{f'}(t) \neq \overrightarrow{0}$;
- on appelle point singulier ou stationnaire tout point $M = \overrightarrow{f}(t)$ tel que $\overrightarrow{f'}(t) = \overrightarrow{0}$;
- on appelle arc régulier tout arc dont tout point est régulier ;
- interprétation cinématique : $\overrightarrow{f'}(t)$ désigne le vecteur vitesse au point $M(t)$, $\overrightarrow{f''}(t)$ désigne le vecteur accélération au point $M(t)$.

Tangente :

- en point régulier : si $M(t_0)$ est tel que $\overrightarrow{f'}(t_0) \neq \overrightarrow{0}$, alors $\overrightarrow{f'}(t_0)$ dirige la tangente ;
- en un point singulier : la tangente au point $M_0 = \overrightarrow{f}(t_0)$ est dirigée par $\overrightarrow{f^{(p)}}(t_0)$ où $p = \text{Min}\left\{q \in \mathbb{N}^\star \ / \ \overrightarrow{f^{q)}}(t_0) \neq 0\right\}$.

Branches infinies : Soit $\Gamma = \begin{cases} x = X(t) \\ y = Y(t) \end{cases}$. Il y a branche infinie au voisinage de t_0 si : $X(t) \underset{t \to t_0}{\to} \pm\infty$ ou $Y(t) \underset{t \to t_0}{\to} \pm\infty$.

1. $X(t) \underset{t \to t_0}{\to} \pm\infty$ et $Y(t) \underset{t \to t_0}{\to} b$, $b \in \mathbb{R}$: asymptote d'équation $y = b$;
2. $X(t) \underset{t \to t_0}{\to} a$, $a \in \mathbb{R}$ et $Y(t) \underset{t \to t_0}{\to} \pm\infty$: asymptote d'équation $x = a$;
3. $X(t) \underset{t \to t_0}{\to} \pm\infty$ et $Y(t) \underset{t \to t_0}{\to} \pm\infty$: calculer $a = \lim\limits_{t \to t_0} \dfrac{Y(t)}{X(t)}$:

(a) $a = \pm\infty$: branche parabolique de direction asymptotique l'axe $(y'y)$;

(b) $a = 0$: branche parabolique de direction asymptotique l'axe $(x'x)$;

(c) $a \in \mathbb{R}$: calculer $b = \lim\limits_{t \to t_0} Y(t) - a \cdot X(t)$:

i. $b = \pm\infty$: branche parabolique de direction asymptotique la droite $\Delta : y = a \cdot x$;

ii. $b \in \mathbb{R}$: branche parabolique de direction asymptotique la droite $\Delta : y = a \cdot x + b$.

Courbes polaires : On étudie des courbes d'équations polaires $r = f(\theta)$:

$$\mathcal{C} = \left\{ M \in \mathcal{P} \ / \ \exists (r, \theta) \in \mathbb{R}^2 : r = f(\theta) \text{ et } (r, \theta) \text{ est un couple de coordonnées polaires de } M \right\}$$

$$\overrightarrow{f'}(\theta) = f'(\theta)\overrightarrow{e_r}(\theta) + f(\theta)\overrightarrow{e_\theta}(\theta)$$

Tangente :

- si $M \neq (0,0)$ et si $f'(\theta) = 0$, la tangente est orthogonale au rayon vecteur $\overrightarrow{OM}(\theta)$;
- si $M = (0,0)$ i.e. s'il existe $\theta_0 \ / \ M(\theta_0) = (0,0)$, la tangente en $(0,0)$ a pour angle polaire θ_0.

Plan d'étude d'une courbe polaire :

1. domaine de définition ;
2. analyse des propriétés permettant de reduire le domaine d'étude ;
3. calculer $f'(\theta)$, en étudier le signe et faire un tableau de variations ;
4. relever les points particuliers ;
5. étude des branches infinies si $\exists \theta_0 \in \overline{\mathbb{R}} \ / \ \lim\limits_{\theta \to \theta_0} f(\theta) = \pm\infty$ en paramétrant la courbe ;
6. tracer la courbe.

Quelques courbes d'équations polaires connues :

- cercle passant par $(0,0)$, de centre $\left(\dfrac{a}{2}, \dfrac{b}{2}\right)$ et de rayon $\dfrac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2}$:

$$\rho(\theta) = a \cdot \cos\theta + b \cdot \sin\theta$$

- droite ne passant pas par $(0,0)$ d'équation cartésienne $ax + by = 1$:

$$\rho(\theta) = \frac{1}{a \cdot \cos\theta + b \cdot \sin\theta}$$

- conique de paramètre p, d'excentricité e dans le repère orthonormé $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ qui sont les axes de la coniques :

$$\rho(\theta) = \frac{p}{1 + e \cdot \cos\theta}$$

19.2 Théorème de relèvement

Théorème : théorème de relèvement : Soif $f \in \mathcal{C}^1(I, U)$ où I est un intervalle de $\mathbb{R}$ et U le cercle trignométrique de $\mathbb{R}^2$. À f est donc associé un arc paramétré dont le support est inclus dans U. Alors :

$$\exists \theta \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R}) \ / \ \forall t \in I, \ f(t) = e^{i\theta(t)}$$

et θ est unique à une constante $2k\pi$ près.

19.3 Étude métrique d'un arc orienté

On travaille ici dans E un espace vectoriel euclidien Pratiquement, on se place dans $\mathbb{R}^2$ muni du produit scalaire usuel.

Définition : abscisse curviligne : Soit $\Gamma = (I, \overrightarrow{f})$ un arc paramétrique régulier de classe $\mathcal{C}^1$. On appelle abscisse curviligne toute fonction $S \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R})$ telle que :

$$\forall t \in I,\ S'(t) = \left\| \overrightarrow{f'}(t) \right\|$$

De telles fonctions existent et sont uniques à une constante près :

$$S : t \mapsto \int_{t_0}^{t} \left\| \overrightarrow{f'}(u) \right\| du$$

Principe :

1. poser $s = S(t) = \displaystyle\int_{t_0}^{t} \left\| \overrightarrow{f'}(u) \right\| du$ en ayant choisit t_0 pour que $M(t_0)$ soit l'origine ($s = 0$) pour l'abscisse curviligne ;
2. calculer S^{-1} ;
3. poser $\overrightarrow{g} = \overrightarrow{f} \circ S^{-1}$.

Définition : Une paramétrisation $\Gamma = (J, \overrightarrow{g})$ est dite normale si :

$$\forall s \in J,\ \left\| \overrightarrow{g'}(s) \right\| = 1$$

Propriété : Si on utilise une abscisse curviligne $s = S(t)$ pour reparamétrer un arc $\Gamma = (I, \overrightarrow{f})$, la paramétrisation obtenue est une paramétrisation normale.

Définition : longueur d'un arc :

- dans le cas d'une paramétrisation normale : soit $\Gamma = (J, \overrightarrow{g})$ un arc dont la paramétrisation est normale et où $J = [\alpha, \beta]$:
$$l(\Gamma) = (\beta - \alpha)$$
- dans le cas d'un arc paramétrique régulier : soit $\Gamma = (I, \overrightarrow{f})$ de classe $\mathcal{C}^1$ régulier avec $I = [a, b]$:
$$l(\Gamma) = \int_a^b \left\| \overrightarrow{f'}(t) \right\| dt$$

Applications :

- pour une courbe d'équation cartésienne ($x \in [a, b]$) d'équation $y = f(x)$:
$$l(\mathcal{C}) = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$$
- pour une courbe d'équation polaire $r = \rho(\theta)$ avec $\theta \in [\theta_0, \theta_1]$:
$$l(\mathcal{C}) = \int_{\theta_0}^{\theta_1} \sqrt{(\rho'(\theta))^2 + (\rho(\theta))^2} d\theta$$

Définition 1 : repère de Frénet : On appelle repère de Frénet de l'arc $\Gamma = (I, \overrightarrow{f})$ au point M le repère $\left(M, \overrightarrow{T}, \overrightarrow{N}\right)$ où :

$$\overrightarrow{T} = \frac{\overrightarrow{f'}(t)}{\left\|\overrightarrow{f'}(t)\right\|} = \overrightarrow{g'}(s) \qquad \overrightarrow{N} = r_{\frac{\pi}{2}}\left(\overrightarrow{T}\right)$$

Définition 2 : courbure : $\exists \alpha : J \to \mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{g'}(s) = \begin{pmatrix} \cos\alpha(x) \\ \sin\alpha(s) \end{pmatrix}$. α' s'appelle la fonction courbure. $\alpha'(s)$ est la courbure au point $M(s)$ de l'arc $\Gamma' = (J, \overrightarrow{g})$ paramétré normalement.

Proposition : Au point $M(t)$, la courbure est égale à :

$$\frac{\det\left(\overrightarrow{f'}(t), \overrightarrow{f''}(t)\right)}{\left\|\overrightarrow{f'}(t)\right\|^3}$$

Application :
- pour une courbe d'équation cartésienne $y = f(x)$, la courbure γ est :

$$\gamma(x) = \frac{f''(x)}{\left(1 + f'(x)\right)^{\frac{3}{2}}}$$

- pour une courbe polaire d'équation $r = \rho(\theta)$, la courbure γ est :

$$\gamma(\theta) = \frac{2\rho'(\theta)^2 + \rho(\theta)^2 - \rho(\theta)\cdot\rho''(\theta)}{\left(\rho'(\theta) + \rho(\theta)^2\right)^{\frac{3}{2}}}$$

19.4 Théorème des fonctions implicites

Théorème : théorème des fonctions implicites : Soit $f \in \mathcal{C}^1(U, \mathbb{R})$ où U est un ouvert de $\mathbb{R}^2$. Soit $\mathcal{C}$ la courbe d'équation implicite $f(x, y) = 0$. Soit $M_0 = (x_0, y_0) \in \mathcal{C}$ tel que $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$. Alors il existe : deux intervalles I, J de $\mathbb{R}$ tels que $I \times J \subset U$ et une fonction $\varphi \in \mathcal{C}^1(I, J)$ tel que :

$$\forall (x, y) \in I \times J,\ f(x, y) = 0 \Leftrightarrow y = \varphi(x) \text{ avec } \varphi(x_0) = y_0$$

Et alors :

$$\varphi'(x) = \frac{-\frac{\partial f}{\partial x}\big(x, \varphi(x)\big)}{\frac{\partial f}{\partial y}\big(x, \varphi(x)\big)}$$

Théorème : Soit $\mathcal{C}$ une courbe d'équation implicite $f(x, y) = 0$ où $f \in \mathcal{C}^1(U, \mathbb{R})$. Soit $M_0 = (x_0, y_0) \in \mathcal{C}$ tel que $\overrightarrow{grad} f(M_0) \neq \overrightarrow{0}$. Alors :
- le point M_0 est dit « régulier »(définition particulière poir les courbes définies implicitement) ;
- la tangente en M_0 est orthogonale à $\overrightarrow{grad} f(M_0)$ et a donc comme équation :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\cdot(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\cdot(y - y_0)$$

Application aux coniques :

- tangente à une ellipse $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ en un point (x_0, y_0) :

$$\mathcal{T} : \frac{xx_0}{a2} + \frac{yy_0}{b^2} = 1$$

- tangente à une hyperbole $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ en un point (x_0, y_0) :

$$\mathcal{T} : \frac{xx_0}{a2} - \frac{yy_0}{b^2} = 1$$

- tangente à une parabole $y2 = 2px$ en un point (x_0, y_0) :

$$\mathcal{T} : yy_0 = p(x + x_0)$$

19.5 Intégrale curviligne, circulation

Hypothèses : U est un ouvert de $\mathbb{R}^2$, $f, P, Q \in \mathcal{C}^1(U, \mathbb{R}^2)$, $P_i \in \mathcal{C}^1(U, \mathbb{R}^n)$.

Définition - écriture : formes différentielles et champ de vecteur :

- Forme différentielle de classe $\mathcal{C}^1$ sur U :

  Définition 1 :

$$\omega : U \xrightarrow{\mathcal{C}^1} \mathcal{L}(E, \mathbb{R}) = E^\star$$

  Écriture locale :

$$\forall (x, y) \in U,\ \omega(x, y) = P(x, y)e_1^\star + Q(x, y)e_2^\star \qquad \omega(x, y) = P(x, y)dx + Q(x, y)dy$$

  Écriture globale :

$$\omega = Pdx + Qdy$$

  Particularité :

$$\forall (x, y) \in U,\ \forall (h, k) \in \mathbb{R}^2,\ \omega(x, y)(h, k) = P(x, y)h + Q(x, y)k$$

  Définition 2 : ω est une forme différentielle exacte si :

$$\exists f \in \mathcal{C}^1(U, \mathbb{R}) \ / \ \omega = df$$

  Définition 3 : f est alors une primitive de ω.

  Définition 4 : ω est une forme différentielle fermée si :

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$$

  Définition 4' : Plus généralement, $\omega = \sum P_i dx_i$ est fermée si :

$$\forall i, j,\ \frac{\partial P_i}{\partial x_j} = \frac{\partial P_j}{\partial x_i}$$

- Champ de vecteur défini sur U :

Définition 1 :

$$V : U \xrightarrow{\mathcal{C}^1} E$$

Écriture locale :

$$\forall (x,y) \in U,\ V(x,y) = \big(P(x,y), Q(x,y)\big) \qquad V(x,y) = P(x,y)e_1 + Q(x,y)e_2$$

Écriture globale :

$$V = (P,Q)$$

Particularité : en euclidien seulement avec une base orthonormée :

$$\forall (x,y) \in U,\ \forall (h,k) \in \mathbb{R}^2,\ \big(V(x,y) \mid (h,k)\big) = P(x,y)h + Q(x,y)k$$

Définition 2 : V est champ de gradients si :

$$\exists f \in \mathcal{C}^1(U,\mathbb{R}) \ / \ V = \overrightarrow{grad} f$$

Définition 3 : f est alors un potentiel scalaire de V. On dit que V dérive du potentiel scalaire f.

Définition 5 : Si $V = (P,Q,R)$ est un champ de vecteurs de $\mathbb{R}^3$:

$$\overrightarrow{rot} V = \left(\frac{\partial \cdot}{\partial x}, \frac{\partial \cdot}{\partial y}, \frac{\partial \cdot}{\partial z}\right) \wedge (P,Q,R)$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$$

Équivalence : $\omega = Pdx + Qdy + Rdz$ est fermée si et seulement si

$$\overrightarrow{rot} V = \overrightarrow{0}$$

Définition : intégrale curviligne (circulation) : Soit ω une forme différentielle de classe $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert U de $\mathbb{R}^2$ ($\omega = Pdx + Qdy$) ou encore soit $\overrightarrow{V} \in \mathcal{C}^1(U,\mathbb{R}^2)$ où $\forall (x,y) \in U,\ \overrightarrow{V}(x,y) = \big(P(x,y), Q(x,y)\big)$ i.e. soit $\overrightarrow{V}$ un champ de vecteurs de classe $\mathcal{C}^1$. Soit $\Gamma = (J,f)$ un arc paramétré de classe $\mathcal{C}^1$ dont le support est inclus dans U et $J = [a,b]$ i.e. $f : \left\{\begin{array}{ccc} J & \to & U \\ x & \mapsto & \big(x(t), y(t)\big) \end{array}\right.$. On appelle :

- intégrale curviligne de ω le long de Γ
- circulation du champ de vecteurs $\overrightarrow{V}$ le long de Γ

le nombre I noté $\displaystyle\int_\Gamma \omega = \int_\Gamma P(x,y)dx + Q(x,y)dy$ égale à :

$$\int_a^b \Big(P\big(x(t),y(t)\big)x'(t) + Q\big(x(t),y(t)\big)y'(t)\Big)dt$$

Ou encore :

$$I = \int_a^b \overrightarrow{V}\big(x(t),y(t)\big)\big(x'(t),y'(t)\big)dt$$

$$I = \int_a^b \omega\big(x(t),y(t)\big)\big(x'(t),y'(t)\big)dt$$

Proposition : Si ω est exacte (i.e. si $\overrightarrow{V}$ est un champ de gradients), si Γ est un arc paramtré d'origine A et d'extrémité B, en notant f une primitive de ω (i.e. un potentiel scalaire de $\overrightarrow{V}$),

$$\int_{\widehat{AB}} df = f(B) - f(A)$$

Théorème 1 : Toute forme différentiable exacte est fermée.

Définition : ouvert étoilé Soit U un ouvert. Il est dit étoilé si :

$$\exists a \in U \ / \ \forall b \in U,\ [ab] \subset U$$

Théorème : théorème de Poincaré : Soit U un ouvert étoilé de $\mathbb{R}^2$ (ou $\mathbb{R}^n$). Soit ω une forme différentielle de classe $\mathcal{C}^1$ définie sur U. Si ω est fermée, alors elle est exacte.

Théorème : théorème de Green-Riemann : Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^2$. Soit K une partie élemntaire de $\mathbb{R}^2$ telle que $K \subset U$. K est notamment compact. Soit Γ un arc paramétré dont le support (arc géométrique) est la frontière de K. On suppose que K est parcouru dans le sens trigonométrique (noté Γ^+). Soit $\omega = Pdx + Qdy$ une forme différentielle de classe $\mathbb{C}^1$. Alors :

$$\int_{\Gamma^+} \omega = \iint_K \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right)$$

Ou encore :

$$\int_{\Gamma^+} Pdx + Qdy = \iint \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy$$

Application : aire d'un secteur polaire : $\Delta = \left\{ (r,\theta) \in \mathbb{R}^2 \ / \ \theta_0 \leqslant \theta \leqslant \theta_1 \text{ et } 0 \leqslant r \leqslant \rho(\theta) \right\}$ où $\mathcal{C}$ est la courbe d'équation polaire $r = \rho(\theta)$.

$$\mathcal{A}(\Delta) = \frac{1}{2} \int_{\theta_0}^{\theta_1} \rho(\theta)^2 d\theta$$

19.6 Surface et courbes de l'espace

Divers modes de définition d'une surface de l'espace :

Courbes de $\mathcal{E}_2$: cartésienne : $y = f(x)$;

paramétrique : $\begin{cases} x = X(t) \\ y = Y(t) \end{cases}$, $\overrightarrow{g} : \begin{cases} U \subset \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}^2 \\ t & \mapsto & \overrightarrow{g}(t) \end{cases}$;

implicite : $F(x,y) = 0$;

Surfaces de $\mathcal{E}_3$: cartésienne : $z = f(x,y)$;

paramétrique : $\begin{cases} x = X(t) \\ y = Y(t) \\ z = Z(t) \end{cases}$, $\overrightarrow{g} : \begin{cases} U \subset \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (r,s) & \mapsto & \overrightarrow{g}(r,s) \end{cases}$;

implicite : $F(x,y,z) = 0$.

Les fonctions f, $\overrightarrow{g}$ et F sont supposées de classe $\mathbb{C}^1$.

Droites et plans tangents :

droite tangente $\mathcal{T}_0$: cartésienne : $y = f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0)$, $\begin{pmatrix} 1 \\ f'(x_0) \end{pmatrix}$ dirige $\mathcal{T}_0$;

paramétrique : $\overrightarrow{g'}(t_0) = \begin{pmatrix} X'(t_0) \\ Y'(t_0) \end{pmatrix}$ dirige $\mathcal{T}_0$;

implicite : $\frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0) = 0$, $\overrightarrow{n} = \begin{pmatrix} \frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0) \\ \frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) \end{pmatrix}$ est orthgonal à $\mathcal{T}_\prime$;

plan tangent $\mathcal{P}_0$ au point M_0 de $\mathcal{S}$: cartésienne : $y = f(x_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0)$, $\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{w} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \end{pmatrix}$ dirigent $\mathcal{P}_0$;

paramétrique : $\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} \frac{\partial X}{\partial r}(r_0, s_0) \\ \frac{\partial Y}{\partial r}(r_0, s_0) \\ \frac{\partial Z}{\partial r}(r_0, s_0) \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{w} = \begin{pmatrix} \frac{\partial X}{\partial s}(r_0, s_0) \\ \frac{\partial Y}{\partial s}(r_0, s_0) \\ \frac{\partial Z}{\partial s}(r_0, s_0) \end{pmatrix}$ dirigent $\mathcal{P}_0$;

implicite : $\frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0) + \frac{\partial F}{\partial z}(x_0, y_0)(z - z_0) = 0$, $\overrightarrow{n} = \begin{pmatrix} \frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0) \\ \frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) \\ \frac{\partial F}{\partial z}(x_0, y_0) \end{pmatrix}$ est orthgonal à $\mathcal{P}_\prime$;

Position de la courbe par rapport à la tangente : Si $f \in \mathcal{E}_2(U, \mathbb{R})$,

- si $f''(x_0) > 0$, alors f est convexe au voisinage de x_0 donc sa courbe représentative est au dessus de $\mathcal{T}$;
- si $f''(x_0) < 0$, alors f est concave au voisinage de x_0 donc sa courbe représentative est en dessous de $\mathcal{T}$;
- si $f''(x_0) = 0$, il faut faire un développement limité d'ordre supérieur à 2.

Position de la surface par rapport au plan tangent $\mathcal{P}$ en (x_0, y_0) : Si $\mathcal{S} \ : \ f(x, y)$. Soit :

$$r = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) \qquad s = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) \qquad t = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0)$$

- si $rt - s^2 > 0$ avec $r > 0$, $\mathcal{S}_f$ est au dessus de $\mathcal{P}$;
- si $rt - s^2 > 0$ avec $r < 0$, $\mathcal{S}_f$ est en dessous de $\mathcal{P}$;
- si $rt - s^2 < 0$, le plan $\mathcal{P}$ traverse la surface : point selle ;
- si $rt - s^2 = 0$, on ne peut pas conclure.

Chapitre 20

Équations différentielles non linéaires

20.1 Équations différentielles du 1er ordre

Objet : On s'interesse aux équations différentielles du type (résolu) $x' = f(t,x)$ où $f \in \mathcal{C}^1(U,\mathbb{R})$ avec U un ouvert de $\mathbb{R}^2$.

Définition : Soit $f \in \mathcal{C}^1(U,\mathbb{R})$ et $(E) \ : \ x' = f(t,x)$. Une solution de (E) est une fonction $\varphi : J \to \mathbb{R}$ dérivable avec J un intervalle de $\mathbb{R}$ telle que :

$$\forall t \in J,\ \big(t,\varphi(t)\big) \in U \text{ et } \varphi'(t) = f\big(t,\varphi(t)\big)$$

Conséquence : Puisque $\forall t \in J,\ \big(t,\varphi(t)\big) \in U,\ \mathcal{C}_\varphi \subset U$.

Définition : problème de Cauchy : On appelle problème de Cauchy un problème du type :

$$\begin{cases} x' = f(t,x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \text{ où } (t_0,x_0) \in U$$

Définition : solution maximale : On appelle solution maximale de (E) toute solution $\varphi : J \to \mathbb{R}$ de (E) pour laquelle il n'existe pas de solution $\tilde{\varphi} : K \to \mathbb{R}$ de (E) tel que $K \supsetneq J$ avec $\tilde{\varphi}_{|J} = \varphi$.

Théorème 1 : théorème de Cauchy-Lipschitz : existence et unicité locale : Le problème de Cauchy $\begin{cases} x' = f(t,x) \text{ où } f \in \mathcal{C}^1(U,\mathbb{R}) \\ x(t_0) = x_0 \text{ où } (t_0,x_0) \in U \end{cases}$, U ouvert de $\mathbb{R}^2$ admet une seule solution φ définie sur un intervalle ouvert J contenant t_0.
Et si ψ est une autre solution définie sur un intervalle ouvert K contenant t_0, alors :

$$\forall t \in J \cap K,\ \varphi(t) = \psi(t)$$

Propriété 1 : Si on peut prolonger φ en $\tilde{\varphi}$ sur $\tilde{J} =]a,b]$ (i.e. si $\tilde{\varphi} : \tilde{J} \to \mathbb{R}$ est solution de (E) avec $\tilde{J}$ non ouvert), alors il existe une solution $\varphi_1 : K \to \mathbb{R}$ avec $K \supset]a,b]$, K étant ouvert.

Propriété 2 : Si $\varphi :]a,b[\to \mathbb{R}$ est solution de (E) et $\lim\limits_{t \to b^-} \varphi(t) = l$ existe dans $\mathbb{R}$ et si $(b,l) \in U$, en posant $\tilde{\varphi}(b) = l$, on obtient une solution $\tilde{\varphi} :]a,b] \to \mathbb{R}$. On peut d'ailleur la prolonger en $\varphi_1 :]a,b+\varepsilon[\to \mathbb{R}$ par la propriété 1.

Propriété 3 : Toute fonction $\varphi :]a,b[\to \mathbb{R}$ solution de (E) est de classe $\mathcal{C}^1$.

Théorème 2 : théorème de Cauchy-Lipschitz : existence et solution maximale : Le problème de Cauchy $\left\{\begin{array}{l} x' = f(t,x) \text{ où } f \in \mathcal{C}^1(U,\mathbb{R}) \\ x(t_0) = x_0 \text{ où } (t_0,x_0) \in U \end{array}\right.$, U ouvert de $\mathbb{R}^2$ où $f \in \mathcal{C}^1(U,\mathbb{R})$ admet une et une seule solution maxiamle. Par ailleurs, son ensemble de définition est ouvert.

Propriété des courbes intégrales : Il existe une unique courbe intégrale maximale passant par (t_0,x_0). Les limites de la courbes sont des points de la frontière.

20.2 Équations différentielles à variables séparables

Définition : Il s'agit d'équations différentielles du type :

$$x' = \frac{f(t)}{g(x)}$$

où $f \in \mathcal{C}^1(I,\mathbb{R})$ et $g \in \mathcal{C}^1(J,\mathbb{R}^\star)$.
Remarque : les équations différentielles à variables séparables relèvent des théorèmes de Cauchy-Lipschitz.

20.3 Systèmes autonomes

Définition : On appelle système autonome tout système différentiels de la forme :

$$\left\{\begin{array}{l} x' = f(x,y) \\ y' = g(x,y) \end{array}\right.$$

où $f, g \in \mathcal{C}^1(U,\mathbb{R})$ avec U ouvert de $\mathbb{R}^2$.

Proposition : translation dans le temps Soit $\overrightarrow{\Gamma} : I \to U$ une solution du système autonome. Soit $\overrightarrow{\Gamma_a} : a + I \to U$ définie par :

$$\forall t \in a + I,\ \overrightarrow{\Gamma_a}(t) = \overrightarrow{\Gamma}(t - a)$$

Alors $\overrightarrow{\Gamma_a}$ est aussi solution du système autonome.

Résultats fondamentaux : En extrapolant le théorème de Cauchy-Lipschitz, on obtient :

- existence et « unicité » d'une solution locale ;
- existence et unicité d'une solution maximale si on a posé une condition initiale $\left\{\begin{array}{l} x(t_0) = x_0 \\ y(t_0) = y_0 \end{array}\right.$.

Étude d'un système autonome :

1. étude géométrique (ici, seul l'arc géométrique nous interesse)
   (a) recherche des points stationnaires :
   on résout $\left\{\begin{array}{l} f(x_0,y_0) = 0 \\ g(x_0,y_0) = 0 \end{array}\right.$. L'arc paramétré $\tilde{\Gamma} : \left\{\begin{array}{lcl} \mathbb{R} & \to & U \\ t & \mapsto & (x_0,y_0) \end{array}\right.$ est une solution évidente.
   Conséquence théorique : soit Γ un autre arc solution i.e. un arc non constant, alors Γ est régulier ;

(b) recherche d'une « intégrale première » du champ de vecteurs $\overrightarrow{V}$:
on cherche $F : U \to \mathbb{R}$ telle que $\overrightarrow{grad} F \perp \overrightarrow{V} = \big(f(x,y) g(x,y)\big)$ i.e. telle que :

$$\forall (x,y) \in U,\ \frac{\partial F}{\partial x}(x,y) \times f(x,y) + \frac{\partial F}{\partial y}(x,y) \times g(x,y) = 0$$

Après avoir trouvé une telle fonction F, on obtient que l'arc est porté par la courbe d'équation implicite $F(x,y) = k$ i.e. la ligne de niveau de la fonction $z = f(x,y)$;

2. déterminer « la loi horaire » i.e. de quelle manière l'arc est parcouru en fonction du temps :

$$\underset{\text{équation implicite}}{\mathcal{C} : F(x,y) = k} \to \underbrace{\left\{ \begin{array}{l} x = X(u) \\ y = Y(u) \end{array} \right.}_{\text{paramétrisation}} \xrightarrow[\substack{\text{en remplaçant} \\ \text{dans le système}}]{u=U(t)\ ?} U(t) = \ldots \to \left\{ \begin{array}{l} x = X\big(U(t)\big) \\ y = Y\big(U(t)\big) \end{array} \right. = \overrightarrow{\Gamma}(t)$$