Chapitre 10 : espaces préhilbertiens réels, espaces hermitiens

8/12/2011

---

1 Formes bilinéaires et formes quadratiques

$\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Définition : forme bilinéaire symétrique : Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé. Soit $\Phi : E \times E \to \mathbb{K}$. Φ est une forme bilinéaire si :

1. $\forall u \in E$, $\Phi(u,.) : \begin{cases} E \to \mathbb{K} \\ v \mapsto \Phi(u,v) \end{cases}$ est linéaire ;
2. $\forall v \in E$, $\Phi(.,v) : \begin{cases} E \to \mathbb{K} \\ u \mapsto \Phi(u,v) \end{cases}$ est linéaire.

Si de plus, $\forall (u,v) \in E \times E$, $\Phi(u,v) = \Phi(v,u)$, Φ est dite symétrique.

Structure : Soit $\mathcal{BL}(E) = \{\Phi : E \times E \to \mathbb{K}$ tel que Φ bilinéaire$\}$ l'ensemble des formes bilinéaires.
Soit $\mathcal{BL}_s(E) = \{\Phi \in \mathcal{BL}(E)$ tel que Φ symétrique$\}$ l'ensemble des formes bilinéaires symétrique.
$(\mathcal{BL}(E), +, \cdot)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.
$(\mathcal{BL}_s(E), +, \cdot)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Représentation polynomiale en dimension finie : Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie de base $(e_1, \ldots, e_n) = \mathcal{B}$. Soit $(x,y) \in E \times E$. Ainsi, $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$ et $y = \sum_{j=1}^{n} y_j e_j$.
Si Φ est une forme bilinéaire et $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $\alpha_{i,j} = \Phi(e_i, e_j)$,

$$\Phi(x,y) = \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \alpha_{i,j} x_i y_j$$

Définition : Soit $\Phi \in \mathcal{BL}(E)$ où E est de dimension finie, de base $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$. Soit $A = (\Phi(e_i, e_j))_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
A est appelé la matrice de la forme bilinéaire Φ dans la base $\mathcal{B}$, et noté $A = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(\Phi)$.
Soit $(x,y) \in E \times E$. Ainsi ; $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$ et $y = \sum_{j=1}^{n} y_j e_j$.

$$(\Phi(x,y)) = {}^tX \cdot A \cdot Y$$

Structure : $\Psi : \begin{cases} \mathcal{BL}(E) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \\ \varphi \mapsto \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(\varphi) \end{cases}$ est un isomorphisme.

Conséquence : Soit $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Si $\forall X, Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, ${}^tX \cdot A \cdot Y = {}^tX \cdot B \cdot Y$ alors nécéssairement $A = B$.

Effet d'un changement de base : Soit $\mathcal{B}'$ une autre base de E. Soit $P = Pass(\mathcal{B}, \mathcal{B}')$. Soit $x, y \in E$ dont les vecteurs colonnes associés (vecteurs de leur coordonées) relativement aux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ sont X, X' et Y, Y'.

$${}^tX \cdot A \cdot Y = {}^tX' \cdot \big({}^tP \cdot A \cdot P \big) \cdot Y'$$

$$B = {}^tP \cdot A \cdot P$$

Définition : Deux matrices A et $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ sont dites congruentes s'il existe $P \in GL_n(\mathbb{K})$ telle que $B = {}^tP \cdot A \cdot P$.

Proposition : Soit $\Phi \in \mathcal{BL}(E)$. Soit $A \in \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(\Phi) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ où $\mathcal{B}$ est une base de E.

$$[\Phi \text{ est symétrique}] \Leftrightarrow [A \text{ est symétrique}]$$

Complément sur les matrices : On note $\mathcal{S}_n(\mathbb{K}) = \big\{ M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) / \ {}^tM = M \big\}$ l'ensemble des matrices symétriques. C'est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et est de dimension $\dfrac{n(n+1)}{2}$.
On note $\mathcal{A}_n(\mathbb{K}) = \big\{ M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) / \ {}^tM = -M \big\}$ l'ensemble des matrices antisymétriques. C'est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et est de dimension $\dfrac{n(n-1)}{2}$.

$$\mathcal{M}_n(\mathbb{K}) = \mathcal{S}_n(\mathbb{K}) \oplus \mathcal{A}_n(\mathbb{K})$$

Forme polynomiale particulière aux formes bilinéaires symétriques : Soit φ une forme bilinéaire et $x, y \in E$ avec $x = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i e_i$ et $y = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} y_j e_j$, $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ étant une base de E. Si φ est symétrique,

$$\varphi(x, y) = x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{i,i} x_i y_i + \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} \alpha_{i,j} (x_i y_j + x_j y_i)$$

Ainsi, $\dim \mathcal{BL}_s(E) = \dfrac{n(n+1)}{2}$ avec $n = \dim E$.

Définition : forme quadratique : Soit E un espace vectoriel. Soit $q : E \to \mathbb{K}$. On dit que q est une forme quadratique s'il existe $\varphi \in \mathcal{BL}_s(E)$ telle que $\forall u \in E,\ q(u) = \varphi(u, u)$.
On dira que φ est la forme polaire de q.

Écriture polynomiale d'une forme quadratique : Soit q une forme quadratique et $x, y \in E$ avec $x = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i e_i$ et $y = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} y_j e_j$, $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ étant une base de E.

$$q(u) = \varphi(u, u) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{i,i} x_i^2 + 2 \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} \alpha_{i,j} x_i y_j$$

Forme quadratique et matrice : La matrice $A = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(\varphi) = (\alpha_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ sera aussi appelée matrice de la forme quadratique. C'est donc la matrice de sa forme polaire. On a alors $\forall x \in E$ tel que $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$, si $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$,

$$\big(q\,(x)\,\big) = {}^tX \cdot A \cdot X$$

Strucuture : L'ensemble des formes quadratiques est noté $Q(E)$.
$(Q(E), +, \cdot)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Identité de polarisation :

$$(x \mid y) = \frac{1}{2}\left(\|x+y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2\right)$$

$$(x \mid y) = \frac{1}{2}\left(\|x\|^2 + \|y\|^2 - \|x-y\|^2\right)$$

$$(x \mid y) = \frac{1}{4}\left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\right)$$

Théorème : Soit q une forme quadratique sur E et φ sa forme polaire. Alors $\forall x, y \in E$,

$$\varphi(x,y) = \frac{1}{2}\left(q(x+y) - q(x) - q(y)\right)$$

$$\varphi(x,y) = \frac{1}{2}\left(q(x) + q(y) - q(x-y)\right)$$

$$\varphi(x,y) = \frac{1}{4}\left(q(x+y) - q(x-y)\right)$$

Définition : forme biliénaire symétriques définies positives ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$) : Une forme bilinéaire symétrique φ sur un $\mathbb{R}$-espace vectoriel (resp. une forme quadratique q sur E) est dite :

- positive si $\forall x \in E,\ \varphi(x,x) \geqslant 0$ (resp. $q(x) \geqslant 0$) ;
- définie positive si de plus, $\forall x \in E, \varphi(x,x) = 0 \Rightarrow x = 0_E$ (resp. $q(x) = 0 \Rightarrow x = 0_E$).

Théorème : inégalité de Cauchy-Schwarz : Soit φ une forme bilinéaire symétrique positive. Soit q la forme quadratique associée. Alors

$$\forall x, y \in E,\ \varphi(x,y)^2 \leqslant \varphi(x,x) \times \varphi(y,y) \text{ i.e. } \varphi(x,y)^2 \leqslant q(x) \times q(y)$$

Si de plus φ est définie positive, alors l'égalité a lieu si et seulement si les vecteurs x et y sont colinéaires.

2 Espaces préhilbertiens réels, produit scalaire

Maintenant, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$.

Définitions : Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

- On appelle produit scalaire toute forme bilinéaire symétrique sur E définie postive ;
- Lorsque E est muni d'un produit scalaire φ, le couple (E, φ) (ou plus simplement E) est dit préhilbertien réel ;
- Si de plus E est de dimension finie, il est dit euclidien.

Notation : à partir de maintenant, on préfère à la notation préfixe $\varphi(x, y)$ la notation infixe $(x \mid y)$ (on trouve aussi $< x, y >$). On parle alors du produit $(. \mid .)$ (pour φ).

Définition : norme euclidienne : $\forall x \in E$, on pose $\|x\|_2 = \sqrt{(x \mid x)}$

Propriétés :

- $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2(x \mid y)$
- égalités de polarisations :
  1. $(x \mid y) = \dfrac{1}{2}\left(\|x + y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2\right)$
  2. $(x \mid y) = \dfrac{1}{2}\left(\|x\|^2 + \|y\|^2 - \|x - y\|^2\right)$
  3. $(x \mid y) = \dfrac{1}{4}\left(\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2\right)$

Propriété du parallèlogramme :

$$\forall x, y \in E,\ \|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$$

Théorème : inégalité de Cauchy-Schwarz : Soit $(E, (. \mid .))$ un espace préhilbertien réel. Soit $\|.\|_2$ la norme euclidienne associée.

1. $\forall (x, y) \in E^2,\ |(x \mid y)| \leqslant \|x\| \times \|y\|$
2. $\forall (x, y) \in E^2,\ \left[|(x \mid y)| = \|x\| \times \|y\|\right] \Leftrightarrow (x, y)$ est libre.

Théorème : inégalité et égalité de Minkowski (E espace préhilbertien réel) :

$$\forall x, y \in E,\ \|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$$

$$\left[\|x + y\| = \|x\| + \|y\|\right] \Leftrightarrow \left[x = 0_E \text{ ou } \exists \lambda \in \mathbb{R}^+ /\ y = \lambda x\right]$$

3 Orthogonalité

Définitions : Soit E un espace vectoriel préhilbertien réel.

- vecteurs orthogonaux : $x, y \in E /\ (x \mid y) = 0$;
- famille orthogonale $(e_i)_{i \in I} \in E^I /\ \forall i, j \in I /\ i \neq j,\ (e_i \mid e_j) = 0$;
- famille orthogonale $(e_i)_{i \in I} \in E^I /\ \forall i, j \in I,\ (e_i \mid e_j) = \delta_{i,j}$;
- sous-espaces vectoriels orthogonaux F et G tels que $\forall (x, y) \in F \times G,\ (x \mid y) = 0$.

Proposition 1 : Toute famille orthogonale de vecteurs non nuls est libre.

Corollaires :

- Toute famille orthonormale est libre.
- Toute famille orthonormale et génératrice est une base.
- Si $\dim E = n$, toute famille orthonormale de n vecteurs est une base.

Proposition 2 : théorème de Pythagore : Soit E un espace préhilbertien réel. Si $(x_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ est une famille orthogonale de vecteurs de E, alors

$$\left\|\sum_{i=1}^{n} x_i\right\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \|x_i\|^2$$

Définition : orthogonale d'un sous-espace vectoriel : On appelle orthogonal d'un sous-espace vectoriel F de E le sous-espace vectoriel noté $F^\perp$ et défini par :

$$F^\perp = \{x \in E / \ \forall y \in F, \ (x \mid y) = 0\}$$

Propriétés :

1. $F^\perp$ est un sous-espace vectoriel de E.
2. $\{0_E\}^\perp = E \qquad E^\perp = \{0_E\}$.
3. Si G est un sous-espace vectoriel orthogonal à F, alors $G \subset F^\perp$.
4. $F^\perp$ est, au sens de l'inclusion, le plus grand sous-espace vectoriel orthogonal à F.
5. Si $F_1 \subset F_2$, alors $F_1^\perp \supset F_2^\perp$.
6. $F \subset \left(F^\perp\right)^\perp$.
7. La somme $F + F^\perp$ est directe.

Proposition : S'il existe une sous-espace vectoriel G orthogonal à F tel que $G \oplus F = E$, nécessairement $G = F^\perp$.
$G = F^\perp$ est appelé le supplémentaire orthogonal de F.

Proposition : projection orthogonale : Soit F un sous-espace vectoriel de E tel que $F \oplus F^\perp = E$. On appelle projection (projecteur) orthogonale de E sur F la projection de E sur F de direction $F^\perp$.

Projection sur une droite : Soit $a \in E, \ a \neq 0_E$ et $F = Vect(a)$. $\forall x \in E$, la projection de x sur F est :

$$p(x) = (a \mid x) \cdot a \text{ si } a \text{ est unitaire}$$

$$p(x) = \frac{(a \mid x)}{\|a\|^2} \cdot a \text{ sinon}$$

Projection sur un sous-espace vecotiel : Soit $F = Vect(e_1, \ldots, e_p)$ où $(e_j)_{j\in[\![1,p]\!]}$ est orthogonale de vecteurs non nuls. $\forall x \in E$, la projection de x sur F est :

$$p(x) = \sum_{i=1}^{p} (e_i \mid x) \cdot e_i \text{ si } (e_1, \ldots, e_p) \text{ est orthonormée.}$$

$$p(x) = \sum_{i=1}^{p} \frac{(e_i \mid x)}{\|e_i\|^2} \cdot e_i \text{ si } (e_1, \ldots, e_p) \text{ est orthogonale de vecteurs non nuls.}$$

Théorème : Si F possède un supplémentaire orthogonal (i.e. si $F \oplus F^\perp = E$) alors :

$$d(x, F) = \|x - p_F(x)\| = d(x, p_F(x))$$

où $p_F(x)$ est le projeté orthogonal de x sur F.

Définition : sommation de sous-espaces vectoriels orthogonaux : On appelle famille orthogonale $(F_i)_{i\in I}$ de sous-espaces vectoriels toute famille pour la quelle

$$\forall (i,j)\in I^2,\ \text{ si } i\neq j,\ F_i\perp F_j$$

Théroème : Si $(F_i)_{i\in[\![1,b]\!]}$ est une famille orthogonale de sous-espaces vectoriels, alors la somme $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} F_i$ est une somme directe.

Théorème : procédé d'orthogonalisation de Schmidt : Soit $(u_1,\dots,u_p)$ une famille libre d'un espace préhilbertien E.
Il existe une et une seule famille orthonormée $(e_1,\dots,e_p)$ telle que :

1. $\forall i\in[\![1,p]\!]$, $Vect(e_1,\dots,e_i)=Vect(u_1,\dots,u_i)$;
2. $\forall i\in[\![1,p]\!]$, $(e_i\mid u_i)>0$.

Algorithme de construction :
on pose $\displaystyle f_k=u_k-\sum_{i=1}^{k-1}(e_i\mid u_k)e_i=u_k-p_{k-1}(u_k)$ et $\displaystyle e_k=\frac{f_k}{\|f_k\|}$.

Théorème : Soit E un espace préhilbertien réel de dimension quelconque. Soit F un sous-espace vectoriel de E de dimension finie de base $(e_i)_{1\leqslant i\leqslant p}$ orthonormée. Alors :

1. $F\oplus F^{\perp}$. Autrement dit, F possède un supplémentaire orthogonal.
   Et par suite
2. $(F^{\perp})^{\perp}=F$;
3. on peut définir la projection orthogonale p_F de E sur F et $\displaystyle p_F(x)=\sum_{i=1}^{p}(e_i\mid x)e_i$;
4. $\forall x\in E,\ d(x,F)=d(x,p_F(x))=\|x-p_F(x)\|$.

Théorème : inégalité de Bessel : Soit $(e_1,\dots,e_p)$ une famille orthonormale d'un espace vectoriel préhilbertien réel, alors :

$$\forall x\in E,\sum_{i=1}^{p}(e_i\mid x)^2\leqslant\|x\|^2$$

Complément :

$$\|x\|^2=\sum_{i=1}^{p}(e_i\mid x)^2+d(x,F)^2 \text{ avec } F=Vect(e_1,\dots,e_p)$$

4 Espace euclidien

Définition : On appelle espace euclidien tout espace préhilbertien réel de dimension finie.

Théorème 1 : Tout espace euclidien possède une base orthonormée.

Théorème 2 : Toute famille orthonormale peut-être complétée en une base orthonormée.

Isomorphisme entre E et $\mathbb{R}^n$: Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n. E est isomorphe à $\mathbb{R}^n$ via :

$$\varphi : \begin{cases} E \longrightarrow \mathbb{K}^n \\ x = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i e_i \mapsto (x_1, \dots, x_n) \end{cases}$$

φ dépend de la base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ de E choisie.

Isomorphisme entre E et son dual $E^\star$: Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n et $E^\star = \mathcal{L}(E, \mathbb{R})$. E est isomorphe à son dual via :

$$\Psi : \begin{cases} E \longrightarrow E^\star \\ a = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i \mapsto \varphi : \begin{cases} E \longrightarrow \mathbb{R} \\ x = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i e_i \mapsto \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i \end{cases} \end{cases}$$

Autrement dit :

$$\Psi : \begin{cases} E \to E^\star \\ a \mapsto (a \mid .) \end{cases}$$

Expression analytique en base orthonormée du produit scalaire : Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormée de E un espace vectoriel euclidien. $x = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i e_i$ et $y = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} y_i e_i$.

$$\forall i \in [\![1, n]\!],\ x_i = (e_i \mid x)$$

$$(x \mid y) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

$$\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$$

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ et $M = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f) = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$

$$\forall (i,j) \in [\![1, n]\!]^2,\ a_{i,j} = (e_i \mid f(e_j))$$

$$tr(f) = \sum_{i=1}^{n} (e_i \mid f(e_i))$$

5 Espaces préhilbertiens complexes

Définition : forme semi-linéaire : Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel et $\varphi : E \to \mathbb{C}$. On dit que φ est une forme semi-linéaire si :

1. $\forall (x,y) \in E^2,\ \varphi(x+y) = \varphi(x) + \varphi(y)$;
2. $\forall x \in E,\ \forall \alpha \in \mathbb{C},\ \varphi(\alpha x) = \overline{\alpha}\varphi(x)$.

Définition : forme sesquilinéaire : Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel et $\Phi : E \times E \to \mathbb{C}$. On dit que Φ est sesquilinéaire si :

- $\forall x \in E,\ \Phi(x, .)$ est linéaire ;
- $\forall y \in E,\ \Phi(., y)$ est semi-linéaire.

Définition : matrice d'une forme sesquilinéaire : La matrice d'une forme sesquilinéaire Φ dans une base $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ donnée est :

$$A = (\Phi(e_i, e_j))_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$$

$$(\Phi(x, y)) = {}^t\overline{X} \cdot A \cdot Y$$

Définition : forme sesquilinéaire hermitienne : Une forme sesquilinéaire Φ est dite hermitienne si :

$$\forall (x, y) \in E \times E,\ \Phi(y, x) = \overline{\Phi(x, y)}$$

Définition : matrice adjointe : Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. La matrice ${}^t\overline{M}$ est appelée la matrice adjointe de M et est notée $M^\star$.

Définition : matrice hermitienne : Une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est dite hermitienne si ${}^tM = \overline{M}$ (ou encore si $M = M^\star$).

Proposition : Soit Φ une forme sesquilinéaire sur un espace vectoriel de base $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$. Soit $M = \mathcal{M}_\mathcal{B}(\Phi)$.

$$\Phi \text{ hermitienne} \Leftrightarrow M \text{ hermitienne}$$

Propriété : préliminaire : Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

$$\left[\forall X, Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C}),\ {}^t\overline{X} \cdot A \cdot Y = {}^t\overline{X} \cdot B \cdot Y\right] \Leftrightarrow [A = B]$$

Propriété : effet d'un changement de base : Soit Φ une forme sesquilinéaire et deux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$. $M = \mathcal{M}_\mathcal{B}(\Phi)$, $M' = \mathcal{M}_{\mathcal{B}'}(\Phi)$, $P = Pass(\mathcal{B}, \mathcal{B}')$.

$$M' = {}^t\overline{P} \cdot M \cdot P$$

$$M' = P^\star \cdot M \cdot P$$

Définition : positivité : Soit Φ une forme sesquilinéaire hermitienne sur $\mathbb{C}$-espace vectoriel E.

1. Φ est dite positive si $\forall x \in E,\ \Phi(x, x) \geqslant 0$;
2. si de plus $\forall x \in E,\ [\Phi(x, x) = 0] \Rightarrow [x = 0_E]$, elle est dite définie positive.

Définition : (On identifie $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ avec $\mathbb{C}^n$) Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice hermitienne (resp. $M \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$). M est dite positive si :

$$\forall X \in \mathbb{C}^n \text{ (resp. } \mathbb{R}^n\text{)},\ {}^t\overline{X} \cdot M \cdot X \geqslant 0 \text{ (resp. } {}^tX \cdot M \cdot X \geqslant 0\text{)}$$

M est dite définie positive si

$$\forall X \in \mathbb{C}^n \setminus \{0_{\mathbb{C}^n}\} \text{ (resp. } \forall X \in \mathbb{R}^n \setminus \{0_{\mathbb{R}^n}\}\text{)},\ {}^t\overline{X} \cdot M \cdot X > 0 \text{ (resp. } {}^tX \cdot M \cdot X > 0\text{)}$$

Définitions : Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel :

1. On appelle produit scalaire (complexe) sur E toute forme sesquilinéaire hermitienne définie positive.
2. (E, Φ) est dit préhilbertien complexe s'il est muni d'un produit scalaire Φ.
3. Un espace préhilbertien complexe de dimension finie est dit hermitien.
4. On note alors $\|x\| = \sqrt{\Phi(x, x)}$ (norme hermtienne associée).

Proposition : inégalité de Cauchy-Scwharz : Soit Φ une forme sesquilinéaire hermitienne positive sur un $\mathbb{C}$-espace vectoriel E. Alors :

$$\forall x, y \in E,\ |\Phi(x,y)|^2 \leqslant \Phi(x,x) \times \Phi(y,y)$$

Cas d'égalité : si Φ est bien définie positive,

$$|\Phi(x,y)|^2 = \Phi(x,x) \times \Phi(y,y) \text{ si et seulement si } x \text{ et } y \text{ sont colinéaires.}$$

Calcul algébrique utile :

$$\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2Re((x \mid y))$$

Proposition : norme : L'application $N_2 : \begin{cases} E \to \mathbb{R}^+ \\ x \mapsto \|x\|^2 \end{cases}$ est bien une norme.

Proposition : égalité du parallélogramme :

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right)$$

Polarisation

$$Re((x \mid y)) = \frac{1}{2}\left(\|x+y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2\right)$$
$$Im((x \mid y)) = \frac{1}{2}\left(\|ix+y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2\right)$$
$$(x \mid y) = Re((x \mid y)) + iIm((x \mid y))$$

Dualité en dimension finie : Un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie n ($\dim E = \dim E^\star = n$) est ismorphe à son dual via :

$$\Psi : \begin{cases} E \to E^\star \\ a \mapsto (\overline{a} \mid .) \end{cases}$$

Proposition : orthogonalité : Peu de changement par rapport au cas réel.

- Si E est hermitien et si $(e_1, \dots, e_n)$ est une base orthonormée de E,

$$x = \sum_{i=1}^{n} ((e_i \mid x)e_i \text{ i.e. } x_i = (e_i \mid x) \text{ et non pas } (x \mid e_i)$$

- $(x \mid y) = \sum_{i=1}^{n} \overline{x_i} y_i$
- $\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2}$