Chapitre 11 : endomorphismes d'un espace vectoriel euclidien

5/1/2012

Dans tout le chapitre, E désigne un espace vectoriel euclidien.

1 Adjoint d'un endomorphisme

Propriété : $\forall \varphi \in E^\star = \mathcal{L}(E, \mathbb{R}), \exists! a \in E$ tel que $\varphi = (a \mid .)$ ou encore $\forall x \in E,\ \varphi(x) = (a \mid x)$.

Propriété : $\forall (a,b) \in E^2$, si $\forall y \in E,\ (a \mid y) = (b \mid y)$, alors $a = b$.

Proposition : Soit $u \in \mathcal{L}(E)$.

$$\forall x \in E,\ \exists! \widetilde{x} \in E \text{ tel que } \forall y \in E,\ (x \mid u(y)) = (\widetilde{x} \mid y).$$

Définition : adjoint d'un endomorphisme : On appelle (endomorphisme) adjoint de l'endomorphisme u l'application $u^\star$ définie par : $\forall x \in E,\ u^\star(x)$ est l'unique élément de E tel que $\forall y \in E,\ (u^\star(x) \mid y) = (x \mid u(y))$. $u^\star \in \mathcal{L}(E)$.

Propriétés : propriétés algébriques de $u^\star$: Soit $u \in \mathcal{L}(E)$.

1. $(u^\star)^\star = u$
2. $(u+v)^\star = u^\star + v^\star$
3. $(\alpha u)^\star = \alpha u^\star$
4. $(Id_E)^\star = Id_E$
5. $(u \circ v)^\star = v^\star \circ u^\star$
6. Si $u \in GL(E)$, alors $u^\star \in GL(E)$ et $(u^\star)^{-1} = (u^{-1})^\star$.
7. $0^\star = 0$

Proposition : Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. $\Phi : \left\{ \begin{array}{l} \mathcal{L}(E) \to \mathcal{L}(E) \\ u \mapsto u^\star \end{array} \right.$ est un automorphisme.

Proposition : matrice de $u^\star$ dans une base orthonormée : Soit $\mathcal{B}$ une base orthonormée, soit $u \in \mathcal{L}(E)$.

$$\mathcal{M}_\mathcal{B}(u^\star) = {}^t\mathcal{M}_\mathcal{B}(u)$$

Corollaire :

$$rg(u^\star) = rg(u) \qquad tr(u^\star) = tr(u) \qquad \det(u^\star) = det(u)$$

Conséquence :

$$\chi_{u^\star} = \chi_u \qquad Sp(u^\star) = Sp(u) \qquad \mu_{u^\star} = \mu_u$$

Proposition : noyau et image : Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et $u^\star$ son adjoint. Alors :

$$Ker(u^\star) = Im(u)^\perp \qquad Im(u^\star) = Ker(u)^\perp$$

Proposition : sous-espaces stables : Soient $u \in \mathcal{L}(E)$ et $u^\star$ son adjoint. Soit F un sous-espace vectoriel de E. Alors

$$[F \text{ est stable par } u] \Leftrightarrow \left[F^\perp \text{ est stable par } u^\star\right]$$

Proposition : normes subordonnées : Soit $u \in \mathcal{L}(E)$.

$$|||u||| = |||u^\star||| \qquad |||u^\star \circ u||| = |||u|||^2$$

2 Endomorphisme autoadjoint (ou symétrique)

Définition : endomorphisme autoadjoints : Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. u est dit autoadjoint (ou symétrique) s'il est égal à son adjoint, autrement dit si $u^\star = u$.

Proposition : matrice d'un endomorphisme autoadjoint : Soit $\mathcal{B}$ une base orthonormée. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et soit $A = \mathcal{M}_\mathcal{B}(u)$. u est autoadjoint si et seulement si A est symétrique.

Définition / strucure de $\mathcal{S}(E)$: On note $\mathcal{S}(E) = \{u \in \mathcal{L}(E) \text{ tel que } u^\star = u\}$. $(\mathcal{S}(E), +, \cdot)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$ isomorphe à $(\mathcal{S}_n(E), +, \times)$.

Propositon : formes bilinéaire symétriques et endomorphisme symétrique : Si E est un espace vectoriel euclidien, $\mathcal{B}$ une base orthonormée de E, $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $\mathcal{M}_\mathcal{B}(u) = A$, $\varphi \in \mathcal{BL}_s(E)$ telle que $\mathcal{M}_\mathcal{B}(\varphi) = A$.
Alors, $\forall (x, y) \in E^2,\ \varphi(x, y) = (x \mid u(y))$.

3 Automorphismes orthogonaux (rappels, compléments)

Définitions : Les cinq définitions suivantes des automorphismes orthogonaux sont équivalentes :

1. $\forall u \in \mathcal{L}(E),\ \forall (x, y) \in E^2,\ (u(x) \mid u(y)) = (x \mid y)$ i.e. u conserve le produit scalaire.
2. $\forall u \in \mathcal{L}(E),\ \forall x \in E,\ \|u(x)\| = \|x\|$ i.e. u conserve la norme ;
3. soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et l'image d'une base orthonormée est une base orthonormée ;
4. $\forall (x, y) \in E^2,\ \|u(x) - u(y)\| = \|x - y\|$ et $u(0_E) = 0_E$;
5. $u \in \mathcal{L}(E)$ et $u^\star \circ u = Id_E$.

Définition / structure : $(O(E), \circ)$ est appelé groupe orthogonal de E avec $O(E) = \{u \in \mathcal{L}(E) \text{ tel que } u^\star \circ u = Id_E\}$.
$(O(n), \circ)$ est appelé groupe orthogonal d'ordre n avec $O(n) = \{M \in GL_n(\mathbb{R}) \text{ tel que } {}^tM \cdot M = I_n\}$.

Proposition : Soit $u \in O(E)$ (resp. $A \in O(n)$) alors $\det u \in \{-1, 1\}$ (resp. $\det A \in \{-1, 1\}$).

Définition : On appelle $SO(E) = \{u \in O(E) \text{ tel que } \det u = 1\}$ le groupe spécial orthogonal de E.
On appelle $SO(n) = \{A \in O(n) \text{ tel que } \det A = 1\}$ le groupe spécial orthogonal d'ordre n.

Propriété : Soit $\mathcal{B}$ orthonormale, $\mathcal{B}'$ une autre base de E.

$$[\mathcal{B}' \text{ orthonormale}] \Leftrightarrow [Pass(\mathcal{B}, \mathcal{B}') \in O(n)]$$

4 Réduction des endomorphsismes symétriques, des matrices symétriques

Lemme : Soit $u \in \mathcal{S}(E)$ (resp. $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$) où E un espace vectoriel non réduit au vecteur nul. Alors, le polynôme caractéristique de u est scindé dans $\mathbb{R}$. Ainsi, $Sp(u) \neq \varnothing$ (resp. $Sp(A) \neq \varnothing$) et il existe des vecteurs propres.

Lemme : Les sous-espaces propres de $u \in \mathcal{S}(E)$ (resp. $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$) sont orthgonaux.

Théorème spectrale 1 : (version endomorphisme) : Soit $u \in \mathcal{S}(E)$ (i.e. u un endomorphisme symétrique ou autoadjoint). Alors u est diagonalisable dans une base orthonormée et ses sous-espaces propres sont orthogonaux.

Théorème spectrale 2 : (version matricielle) : Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, $n \in \mathbb{N}^\star$, alors $\exists \Delta \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que Δ diagonale, $\exists P \in O(n)$ telle que

$$\Delta = P^{-1} \cdot A \cdot P = {}^tP \cdot A \cdot P$$

Théorème spectrale 3 : (version bilinéaire) : Soit $\varphi \in \mathcal{BL}_s(E)$ (resp. q une forme quadratique), alors il existe une base orthonormée de E dans laquelle la matrice de φ (resp. de q) est diagonale.

Définition : On dit que $\varphi \in \mathcal{BL}_s(E)$ (resp. $q \in \mathcal{Q}(E)$) est non dégénéré si $rg(\varphi) = n$ (resp. $rg(q) = n$).

Propriété :

$$[\varphi \text{ non dégénéré}] \Leftrightarrow [0 \notin Sp(A)]$$

Théorème : (pour $\mathcal{S}(E)$, formulation identique pour $\mathcal{BL}_s(E)$ et $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$) : Soit $u \in \mathcal{S}(E)$.

$$u \in \mathcal{S}^+(E) \Leftrightarrow \forall \lambda \in Sp(u),\ \lambda \geqslant 0$$

$$u \in \mathcal{S}^{++}(E) \Leftrightarrow \forall \lambda \in Sp(u),\ \lambda > 0$$

Théorème : Soit $u \in \mathcal{S}^+(E)$, alors

$$|||u||| = \underset{\|x\| \leqslant 1}{Sup}\ (x \mid u(x)) = \underset{\|x\|=1}{Sup}\ (x \mid u(x)) = Max\,(Sp(u))$$

5 Application aux coniques

Définition : conique : Dans le plan euclidien d'un repère $\mathscr{R}_0 = (0, \vec{e_1}, \vec{e_2})$ orthonormée, on appekke conique toute courbe d'équation :

$$P(x, y) = 0$$

dans le repère $\mathscr{R}_0$ où $P \in \mathbb{R}[X, Y]$ tel que P est de dégré 2.
Autrement dit, $P(x, y) = ax^2 + 2bxy + cy^2 + dx + ey - k = 0$, $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$. On voit apparaître la forme quadratique $q((x, y)) = ax^2 + 2bxy + cy^2$ sur $\mathbb{R}^2$ de matrice $M = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$.

Étude bilan : Soit $\det M = ac - b^2$. $M \in \mathcal{S}_2(\mathbb{R})$. M est diagonalisable en $\Delta = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0\mu & \end{pmatrix}$.
$\det M = \lambda\mu$. Soit $\mathcal{B} = (\vec{i}, \vec{j})$ une base orthonormée de vecteurs propres.
Le cas $\lambda = \mu$ n'arrive que si $(a, b, c) \neq (a, 0, a)$: il s'agit d'i, cercle, d'un singleton ou de $\varnothing$.

	cas intéressant	cas moins intéressant
$\det M > 0$	ellipse	$\{\Omega\}$, $\varnothing$
$\det M < 0$	hyperbole	$D_1 \cup D_2$ (sécantes)
$\det M = 0$	parabole	$\varnothing$, $D_1 \cap D_2$ (parallèles)

- Si $\det M \neq 0$, la conique a un centre de symétrie $\Omega(x_0, y_0)$ que l'on obtient en résolvant le système
$$\begin{cases} \dfrac{\partial P}{\partial x}(x, y) = 0 \\ \dfrac{\partial P}{\partial y}(x, y) = 0 \end{cases}$$
C'est une ellipse ou une hyperbole (ou cas moins intéressants).
Les axes (de symétries) de la conique $\mathcal{C}$ sont alors portés par les vecteurs propres respectifs.
- Si $\det M = 0$ la conique est une parabole (ou cas moins intéressant).
L'axe de symétrie de la parabole est dirigé par $\vec{i} \in E_0$.

6 Application aux quadriques

Définition : quadrique : Dans l'espace affine $\mathcal{E}_3$ de dimension 3, on appelle quadrique toute surface d'équation :

$$P(x, y, z) = 0$$

dans un repère $(0, \vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ orthonormé où $P \in \mathbb{R}[X, Y, Z]$ tel que P est de degré 2.
Autrement dit, $P(x, y, z) = ax^2 + by^2 + cz^2 + 2dxy + 2exz + 2fyz + gx + hy + iz - h = 0$ avec $(a, b, c, e, d, f) \neq (0, 0, 0, 0, 0, 0)$

Analyse rapide : Soit $M = \begin{pmatrix} a & d & e \\ d & b & f \\ e & f & c \end{pmatrix} = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(q)$ où $\mathcal{B} = (\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$.
Il faut calculer $\det M$. On sait alors si la forme quadratique est dégénérée ($\det M = 0$) ou non. il faut ensuite déterminer χ_M, $Sp(M) = \{\lambda, \mu, \nu\} \subset \mathbb{R}$, E_λ, E_μ, E_ν qui sont deux à deux orthogonaux.

Cas $rg\, M = 3$:

1. ellipsoïde si λ, μ, ν non tous nuls et de même signe :

$$\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} + \frac{Z^2}{c^2} = 1$$

2. hyperboloïde (elliptique) à une nappe si λ, μ, k sont de même signe et ν de signe différent :

$$\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} - \frac{Z^2}{c^2} = 1$$

3. hyperboloïde (elliptique) à deux nappes si λ, μ sont de même signe et ν, k sont du signe opposé :

$$\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} - \frac{Z^2}{c^2} = -1$$

4. cône elliptique si λ, μ, k sont de même signe et ν de signe différent et $k = 0$:

$$\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} - \frac{Z^2}{c^2} = 0$$

Cas $rg\, M = 2$ **:**

1. paraboloïde elliptique si λ, μ, k sont de même signe et $\nu = 0$ et présence de Z :

$$\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} = Z$$

2. paraboloïde hyperboloique si λ, μ, k sont de signes contraires et $\nu = 0$ et présence de Z :

$$\frac{X^2}{a^2} - \frac{Y^2}{b^2} = Z$$

3. cylindre elliptique si λ, μ, k sont de même signe et $\nu = 0$ et non présence de Z :

$$\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} = 1$$

4. cylindre hyperboloique si λ, μ, k sont de signes contraires et $\nu = 0$ et non présence de Z :

$$\frac{X^2}{a^2} - \frac{Y^2}{b^2} = 1$$

Cas $rg\, M = 1$ **:** cylindre paraboloïque :

$$X^2 = 2pY$$