# Chapitre 12 : fonctions à valeurs vectorielles - Dérivation, intégration

16/1/2012

---

Dans tout le chapitre, $F$ désigne un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie parfois euclidien. $I, J$ désignent des intervalles de $\mathbb{R}$.

## 1 Dérivée en un point

**Définition :** Soit $f : I \to F,\ a \in I$. On dit que $f$ admet une dérivée en $a$ si

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \text{ existe } \in F$$

Cette limite est noté $f'(a)$.

$$f(x) = f(a) + (x-a)\cdot f'(a) + o(x-a)$$

$$f(x) = f(a) + (x-a)\cdot (f'(a) + o(1))$$

**Structures :** $\mathcal{D}(I,F)$ et $\mathcal{C}^1(I,F)$ sont des $\mathbb{R}$-espace vectoriels.
$\Phi : \begin{cases} \mathcal{D}(I,F) \to \mathcal{F}(I,F) \\ f \mapsto f' \end{cases}$ et $\Psi : \begin{cases} \mathcal{C}^1(I,F) \to \mathcal{C}(I,F) \\ f \mapsto f' \end{cases}$ sont linéaires.

## 2 Linéarité et dérivation

**Proposition 1 :** Soit $u \in \mathcal{L}(F,G)$. Si $f \in \mathcal{C}^1(I,F)$, alors $u \circ f \in \mathcal{C}^1(I,G)$ et $(u\circ f)' = u \circ f'$.

**Corollaire :** Soit $F$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension $n$, de base $(e_1, \ldots, e_n)$.
Soit $f : \begin{cases} I \to F \\ t \mapsto f(t) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} f_i(t)e_i \end{cases}$, avec $f_i : I \to \mathbb{R}$.

$$f \in \mathcal{D}(I,F) \Leftrightarrow \forall i \in [\![1,n]\!],\ f_i \in \mathcal{D}(I,\mathbb{R})$$

et alors $f'(t) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} f_i'(t)e_i$.

**Proposition 2 :** Soient $F, G$ et $H$ trois $\mathbb{R}$-espaces vectoriels. Soit $B : F \times G \to H$ bilinéaire. Si $f \in \mathcal{C}^1(I,F)$ et $g \in \mathcal{C}^1(I,G)$, alors $B(f,g) \in \mathcal{C}^1(I,H)$ et

$$B(f,g)' = B(f',g) + B(f,g') \text{ où } B(f,g) : t \to B(f(t),g(t))$$

# 3 Dérivation et composition

**Proposition 3 :** Soit $f \in \mathcal{C}^1(J, F)$, $\varphi \in \mathcal{C}^1(I, J)$. Alors $(f \circ \varphi) \in \mathcal{C}^1(I, F)$ et

$$\forall t \in I,\ (f \circ \varphi)'(t) = \varphi'(t) f'(\varphi(t)) \text{ i.e. } (f \circ \varphi)' = \varphi'(f' \circ \varphi)$$

# 4 Inégalité des accroissements finies

**Théorème 1 :** Soit $f \in \mathcal{D}(I, F)$ telle que $\|f'\| \leqslant k$ i.e. $\forall t \in I,\ \|f'(t)\| \leqslant k$, alors

$$\forall a, b \in I,\ \|f(b) - f(a)\| \leqslant k|b - a|$$

**Théorème :** Soit $f \in \mathcal{D}(I, F)$.

$$f \text{ est constante} \Leftrightarrow f' = 0$$

# 5 Fonctions de classe $\mathcal{C}^k$, $k \geqslant 1$

**Strucuture :** $\big(\mathcal{C}^k(I, F), +, \cdot\big)$ est un sous-espace vectoriel de $(\mathcal{C}(I, F), +, \cdot)$.

**Théorème : formule de Leibniz :** Soient $f, g \in \mathcal{C}^n(I, \mathbb{K})$ où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}$. Alors $f \times g \in \mathcal{C}^n(I, \mathbb{K})$ et

$$(f \times g)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(n-k)} g^{(k)}$$

**Définition : $\mathcal{C}^k$-difféomorphisme :** Soit $\varphi \in \mathcal{C}^k(I, J)$ où $I, J$ sont deux intervalles de $\mathbb{R}$. On dit que $\varphi$ est un $\mathcal{C}^k$-difféomorphisme si :

- $\varphi$ est bijective ;
- et $\varphi^{-1} \in \mathcal{C}^k(J, I)$.

**Théorème :** Soit $\varphi : I \to J = \varphi(I)$. $\varphi$ est un $\mathcal{C}^1$-difféomporphisme si et seulement si

$$\varphi \in \mathcal{C}^1(I, J) \text{ et } \varphi' \text{ ne s'annule pas sur } I$$

# 6 Particularité des fonctions à valeurs réelles

**Théorème 1 :** Soit $f \in \mathcal{D}(I, \mathbb{R})$ avec $I$ un intervalle ouvert. Si $f$ admet un extremum en $x_o \in I$, alors $f'(x_0) = 0$.

**Théorème 2 : théorème de Rolle :** Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$ telle que $f(a) = f(b)$, alors

$$\exists c \in ]a, b[ \text{ tel que } f'(c) = 0$$

**Théorème 3 : égalité des accroissements finis :** Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$, alors

$$\exists c \in ]a, b[ \text{ tel que } f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$$

**Théorème 4 : théorème de prolongement des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ :** Soit $f : I \to \mathbb{R}$ continue sur $I$ et dérivable sur $I \setminus \{a\}$. Si $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ \neq}} f'(x)$ existe dans $\mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$ et vaut $l$, alors

$$\lim_{\substack{x \to a \\ \neq}} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \text{ existe et vaut } l.$$

En particulier,

- si $\lim\limits_{a} f' = \pm\infty$, $f$ n'est pas dérivable mais $\mathcal{C}_f$ présente une tangente verticale au point d'abscisse $a$ ;
- si $\lim\limits_{a} f' = l \in \mathbb{R}$, alors $f$ est dérivable en $a$ et $f'(a) = l$.

**Formule de Taylor avec reste intégrale :** Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^{n+1}$. On a :

$$f(b) = f(a) + (b-a)f'(a) + \frac{(b-a)^2}{2!}f''(a) + \ldots + \frac{(b-a)^n}{n!}f^{(n)}(a) + \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!}f^{(n+1)}(t)dt$$

**Inégalité de Taylor-Lagrange :** Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction $\mathcal{C}^{n+1}$ et $a, b \in I$.
On note $M = Sup\left\{\left|f^{(n+1)}(t)\right| |t \text{ compris entre } a \text{ et } b\right\}$. On a :

$$\left| f(b) - \left[ f(a) + (b-a)f'(a) + \ldots + \frac{(b-a)^n}{n!}f^{(n)}(a) \right] \right| \leqslant \frac{M|b-a|^{n+1}}{(n+1)!}$$

**Formule de Taylor-Young :** Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction et $a \in I$ fixé.
On suppose que $f$ est $\mathcal{C}^n$ au voisinage $v(a)$ de $a$.
On a :

$$\forall x \in v(a),\ f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + (x-a)^n\varepsilon(x)$$

avec $\varepsilon(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} 0$.

**Définition : fonction convexe :** $f : I \to \mathbb{R}$ est dite convexe sur $I$ si

$$\forall (x,y) \in I /\ x < y,\ \forall \lambda \in [0,1],\ f\left((1-\lambda)x + \lambda y\right) \leqslant (1-\lambda)f(x) + \lambda f(y)$$

**Propriété :** $\forall X, Y \in \mathcal{C}_f$ avec $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de $f$ une fonction convexe. La corde $[XY]$ est au-dessus de l'arc de courbe $\overset{\frown}{XY}$.

**Propriété : croissance des pentes dont on a fixé une extrémité :** Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction. On a : $f$ convexe sur $I$
**ssi** $\forall P, Q, R \in \mathcal{C}_f$ d'abscisses $x < z < y$, on a pente$(PQ) \leqslant$ pente$(PR)$ ;
**ssi** $\forall P, Q, R \in \mathcal{C}_f$ d'abscisses $x < z < y$, on a pente$(PR) \leqslant$ pente$(QR)$ ;
**ssi** $\forall P, Q, R \in \mathcal{C}_f$ d'abscisses $x < z < y$, on a pente$(PQ) \leqslant$ pente$(QR)$.

**Caractérisation analytique :** Soit $f : I \to \mathbb{R}$.

- $f$ convexe sur $I$ si et seulement si pour tout $a \in I$ la fonction $\left| \begin{array}{ccc} I \setminus \{a\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} \end{array} \right.$ est croissante.
- Avec $f$ dérivable, on a : $f$ convexe sur $I$ si et seulement si $f'$ croissante sur $I$.

**Conséquences de la caractérisation analytique :**

- Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction 2 fois dérivable sur $I$. On a :
  $f$ convexe sur I si et seulement si $f'$ est croissante sur $I$.
- Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur $I$.
  Alors $\mathcal{C}_f$ est située au dessus de toutes ses tangentes.

**Inégalités de convexité :**

- exp est convexe sur $\mathbb{R}$ : $\forall x \in \mathbb{R},\ e^x \geqslant x+1$.
- ln est concave sur $]0,+\infty[$ : $\forall x \in ]0,+\infty[,\ \ln x \leqslant x-1$.
- sin est concave sur $[0,\dfrac{\pi}{2}]$ : $\forall x \in [0,\dfrac{\pi}{2}],\ \dfrac{2}{\pi}x < \sin x < x$.

**Généralisation :** Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction convexe. Soit $n \in \mathbb{N}^\star$ et $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ tel que $\forall i \in [\![1,n]\!],\ \alpha_i \geqslant 0$ et $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} \alpha_i = 1$. Soit $x_1, \ldots, x_n \in I$. On a :

$$f\left(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_n x_n\right) \leqslant \alpha_1 f(x_1) + \alpha_2 f(x_2) + \ldots + \alpha_n f(x_n)$$

# 7 Intégration des fonctions vectorielles :

**Propriété :** Soit $f : [a,b] \to F$.

$$\left\| \int_{[a,b]} f \right\| \leqslant \int_{[a,b]} \|f\|$$

**Propriété : linéarité et intégration :** Soit $T \in \mathcal{L}(F,G)$, $f \in \mathcal{C}_m([a,b],F)$, alors :

$$T \circ f \in \mathcal{C}_m([a,b],G) \text{ et } \int_{[a,b]} (T \circ f) = T\left(\int_{[a,b]} f\right)$$

**Théorème : théorème de positivité améliorée :** Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ avec $a < b$, continue et positive sur $[a,b]$.
On a $\displaystyle\int_a^b f(t)dt = 0$ si et seulement si $f = 0_{\mathcal{L}(E)}$.

**Théorème : somme de Riemann :** Soit $f \in \mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$. On pose $\delta$ tel que pour toute subdivision $\sigma = (a = a_0, \ldots, a_n = b)$ de $[a,b]$, $\delta(\sigma) = \underset{i \in [\![0,n-1]\!]}{\mathrm{Max}} (a_{i+1} - a_i)$. Alors, $\forall \varepsilon > 0,\ \exists \alpha > 0$ tel que pour toute subsdivision $\sigma(a_i)_{i \in [\![0,n-1]\!]}$ de $[a,b]$ telle que $\delta(\sigma) \leqslant \alpha$, pour tout choix $c = (c_1, \ldots, c_n) \in [a,b]^{\mathbb{N}}$ tel que $\forall i \in [\![0,n-1]\!],\ c_i \in [a_{i-1}, a_i]$,

$$\left| \int_a^b f(t)dt - \sum_{i=1}^{n} f(c_i)(a_i - a_{i-1}) \right| \leqslant \varepsilon$$