Chapitre 13 : intégration sur un intervalle quelconque : théorie

19/1/2012

---

1 Cas des fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}^+$

Définition : fonction continue par morceaux sur un intervalle : Une fonction $f : I \to \mathbb{K}$ où ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) est dite continue par morceaux sur I si elle est continue par morceaux sur chaque segment $J \subset I$.

Définition : intégrabilité : Soit $f : I \to \mathbb{R}^+$ où I est un intervalle de $\mathbb{R}$. f est dite intégrable (ou sommable) sur I si

- $f \in \mathcal{C}_m(I, \mathbb{R}^+)$;
- et s'il existe $M \in \mathbb{R}^+$ tel que pour tout segment $J \subset I$, $\displaystyle\int_J f \leqslant M$.

On appelle alors intégrale de f sur I le nombre :

$$\int_I f = \text{Sup}\left\{\int_J f : \ J \text{ segment } / \ J \subset I\right\}$$

Définition : suite exhaustive de segments : Soit I un intervalle. On appelle suite exhaustive de segments de I toute suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ croissante pour l'inclusion de segments telle que $\displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}} I_n = I$.

Propriété : propriété fondamentale : Soit $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite exhaustive de segments de I. Soit J un segment inclus dans I. Alors $\exists n_0 \in \mathbb{N} \ / \ J \subset I$ (et a fortiori, si $n \geqslant n_0$, $J \subset I_n$).

Théorème : Soit I un intervalle, soit $f \in \mathcal{C}_m(I, \mathbb{R}^+)$. Soit $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite exhaustive de segments de I.

$$f \text{ est intégrable sur } I \text{ si et seulement si la suite } \left(\int_{I_n} f\right)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge.}$$

Et alors, $\displaystyle\int_I f = \lim_{n\to+\infty} \int_{I_n} f$.

Exemple : « intégrale de Riemann » :

$f : \begin{cases} [1, +\infty[\to \mathbb{R} \\ t \mapsto \dfrac{1}{t^\alpha} \end{cases}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$ si et seulement si $\alpha > 1$ et alors $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha} = \frac{1}{\alpha - 1}$

$g : \begin{cases}]0, 1] \to \mathbb{R} \\ t \mapsto \dfrac{1}{t^\alpha} \end{cases}$ est intégrable sur $]0, 1]$ si et seulement si $\alpha < 1$ et alors $\displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{t^\alpha} = \frac{1}{1 - \alpha}$

Propriété : « linéarité » : Soient $f, g \in \mathcal{C}_m(I, \mathbb{R}^+)$ et $\alpha \in \mathbb{R}^+$. Si f et g sont intégrable sur I, alors $\alpha f + g$ est intégrable sur I et

$$\int_I \alpha f + g = \alpha \int_I f + \int_I g$$

Propriété : croissance et comparaison : Soient $f, g \in \mathcal{C}_m(I, \mathbb{R}^+)$ telles que $f \leqslant g$. Alors si g est intégrable, alors f est intégrable et

$$\int_I f \leqslant \int_I g$$

Propriété : positivité améliorée : Si $f \in \mathcal{C}(I, \mathbb{R}^+)$. Si f est intégrable sur I et si $\displaystyle\int_I f = 0$, alors $f = 0$.

Prorpiété préliminaire : Soit $f \in \mathcal{C}_m(I, \mathbb{R}^+)$. Si f est intégrable sur I et si $I' \subset I$ alors f est intégrable sur I' et

$$\int_{I'} f \leqslant \int_I f$$

Théorème : principe de scission : Soit $f \in \mathcal{C}_m(I, \mathbb{R}^+)$, soit $c \in I$. On pose $I^+ = I \cap [c, +\infty[$, $I^- = I \cap]-\infty, c]$ alors f est intégrable sur I si et seulement si f est intégrable sur I^+ et sur I^- et alors

$$\int_I f = \int_{I^+} f + \int_{I^-} f$$

Théorème : principe de comparaison : Soient $f, g \in \mathcal{C}_m([a, b[, \mathbb{R}^+)$. Si $f(t) \underset{t \to b^-}{=} o(g(t))$ ou $\underset{t \to b^-}{=} O(g(t))$ ou $f(t) \underset{t \to b^-}{\sim} g(t)$ et si g est intégrable sur $[a, b[$, alors f est aussi intégrable sur $[a, b[$.

Corollaire : Si $f \underset{b^-}{\sim} g$. f et g seront toutes les deux intégrables ou toutes deux non intégrables.

Théorème : nouvelle caractérisation de l'intégrabilité des fonctions positives : Soit $f \in \mathcal{C}_m([a, b[, \mathbb{R}^+)$ Soit $F : \begin{cases} [a, b[\to \mathbb{R} \\ X \mapsto \displaystyle\int_a^X f(t)dt = \int_{[a,X]} f \end{cases}$. f est intégrable sur $[a, b[$ si et seulement si F admet à gauche en b une limite finie et alors

$$\int_{[a,b[} f = \lim_{X \to b^-} \int_a^X f(t)dt$$

Proposition : comparaison série intégrale : Soit $f \in \mathcal{C}_m([0, +\infty[, \mathbb{R}^+)$ décroissante sur son intervalle de définition. Alors f est intégrable sur $[0, +\infty[$ si et seulement si $\displaystyle\sum_{n \in \mathbb{N}} f(n)$ converge.

2 Cas des fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$

Définition : Soit $f \in \mathcal{C}_m(I, \mathbb{K})$ où I est un intervalle de $\mathbb{R}$ et $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

f est dite intégrable si $|f|$ est intégrable.

Proposition : comparaison : Soit $f \in \mathcal{C}_m(I, \mathbb{K})$, $\varphi \in \mathcal{C}_m(I, \mathbb{R}^+)$.

Si $|f| \leqslant \varphi$ et si φ est intégrable, alors f est intégrable.

Structure : On note $\mathcal{L}^1(I, \mathbb{K})$ l'ensemble des fonctions intégrables de I dans $\mathbb{K}$.

$(\mathcal{C}^1(I, \mathbb{K}))$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Définitions : Soit $f \in \mathcal{C}_m(I, \mathbb{R})$. On note $f^+ = Max(f, 0)$ et $f^- = Max(-f, 0)$.

Théorème : intégrale d'une fonction à valeurs réelles : Soit $f \in \mathcal{C}_m(I, \mathbb{R})$.

f est intégrable si et seulement si f^+ et f^- le sont.

Définition :

$$\int_I f = \int_I f^+ - \int_I f^-$$

Théorème : intégrale d'une fonction à valeurs complexes intégrable : Soit $f \in \mathcal{C}_m(I, \mathbb{C})$.

f est intégrable si et seulement si $Re(f)$ et $Im(f)$ le sont.

Définition :

$$\int_I f = \int_I Re(f) + i \int_I Im(f)$$

Proposition : utilisation de suite exhaustive de segments : Soit $f \in \mathcal{L}^1(I, \mathbb{K})$ (i.e. f est intégrable). Soit $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite exhaustive de segments de I. Alors :

$$\left(\int_{I_n} f \right)_{n \in \mathbb{N}} \text{ converge et } \int_I f = \lim_{n \to +\infty} f$$

Proposition : autre mode de calcul : Soit $f \in \mathcal{L}^1([a, b[, \mathbb{K})$ (i.e. f est intégrable). Soit $F : \begin{cases} [a, b[\to \mathbb{K} \\ X \mapsto \displaystyle\int_a^X f(t)dt \end{cases}$. Alors :

$$\int_a^b f(t)dt = \lim_{X \to b^-} \int_a^X f(t)dt$$

Propriété : linéarité : Si $f, g \in \mathcal{L}^1(I, \mathbb{R})$ et si $\alpha \in \mathbb{K}$, alors :

$$\int_I \alpha f + g = \alpha \int_I f + \int_I g \text{ ou encore } Int : \begin{cases} \mathcal{L}^1(I, \mathbb{K}) \to \mathbb{K} \\ f \mapsto \displaystyle\int_I f \end{cases} \quad \text{est linéaire.}$$

Propriété : croissance : Si $\mathbb{K}=\mathbb{R}$: Si $f, g \in \mathcal{L}^1(I,\mathbb{R})$ et si $f \leqslant g$, alors :

$$\int_I f \leqslant \int_I g$$

Propriété : inégalité : Si $f \in \mathcal{L}^1(I,\mathbb{K})$, alors :

$$\left|\int_I f\right| \leqslant \int_I |f|$$

Propriété : bornes : Si $a > b$, $f \in \mathcal{L}^1(]b,a],\mathbb{K})$, on pose :

$$\int_a^b f(t)dt = -\int_b^a f(t)dt = \int_{]b,a]} f$$

Propriété : conjugué : Si $f \in \mathcal{L}^1(I,\mathbb{C})$, alors $\overline{f} \in \mathcal{L}^1(I,\mathbb{C})$ et

$$\int_I \overline{f} = \overline{\int_I f}$$

3 Changement de variable

Théorème 1 : cas d'un segment : Soit $f \in \mathcal{C}_m([a,b],\mathbb{K})$. Soit $\varphi \in \mathcal{C}^1([\alpha,\beta],[a,b])$. Alors :

$$\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(u)du = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$$

Théorème 2 : cas d'un intervalle : Soit $f \in \mathcal{C}_m(I,\mathbb{K})$ avec par exemple $I = [a,b[$. Soit $\varphi \in \mathcal{C}^1(J,I)$ où $J = [\alpha,\beta[$ (ou $]\beta,\alpha]$). $a = \varphi(\alpha)$ et $b = \lim\limits_{t\to\beta^-}\varphi(t)$ (ou $b = \lim\limits_{t\to\beta^+}\varphi(t)$) avec φ bijective. Alors :

$$f \in \mathcal{L}^1([a,b[,\mathbb{K}) \text{ si et seulement si } \big[\,(f\circ\varphi)\times\varphi' \in \mathcal{L}^1([\alpha,\beta[,\mathbb{K})\big]$$

$$\text{et alors} \int_a^b f(u)du = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$$

4 Intégration par partie

Pas de thoérème au programme de Spé pour l'intégration par partie sur un intervalle.

Théorème : intégration par partie :

$$\int_a^X f(t)dt = \int_a^X u(t)v'(t)dt = [u(t)v(t)]_a^X - \int_a^X u'(t)v(t)dt$$

où $X \in [a,b[$, $u, v \in \mathcal{C}^1([a,b[,\mathbb{K})$. On note $l_1 = \lim\limits_{X\to b^-} u(X)v(X)$ et $l_2 = \lim\limits_{X\to b^-} \int_a^X (u'v)(t)dt$.
Si l_1 et l_2 existent dans $\mathbb{R}$:

- si $f \geqslant 0$: on a alors proubé que $f \in \mathcal{L}^1([a,b[,\mathbb{R}^+)$;
- si $f \leqslant 0$: le calcul ne sert à rien sauf si on a montré au préalable que $f \in \mathcal{L}^1([a,b[,\mathbb{R})$.

5 Intégrales « impropres » : attention danger

Il est possible que $\lim_{X \to b^-} \int_a^X f(t)dt$ existe (et soit finie) sans que f soit intégrable (mais cela n'arrive pas si $f \geqslant 0$).
Dans ce cas, on dit (encore parfois) que l'intégrale $\int_a^b f(t)dt$ « converge » et on note (quand même exceptionnellement) $\int_a^b f(t)dt = \lim_{X \to b^-} \int_a^X f(t)dt$.
On parle d'intégrale « impropre ».