Chapitre 14 : intégration sur un intervalle quelconque : grands théorèmes

25/1/2012

1 Structure et convergence

Définitions et structures :

- $\mathcal{L}^1\mathcal{C}(I,\mathbb{K}) = \mathcal{L}^1(I,\mathbb{K}) \cap \mathcal{C}(I,\mathbb{K})$: il s'agit de l'ensemble des fonctions continues intégrables. $\mathcal{L}^1\mathcal{C}(I,\mathbb{K})$ a une structure d'espace vectoriel. On définie alors :
$$\forall f \in \mathcal{L}^1\mathcal{C}(I,\mathbb{K}),\ N_1(f) = \|f\|_1 = \int_I |f|dt$$
- $\mathcal{L}^2\mathcal{C}(I,\mathbb{C}) = \{f \in \mathcal{C}(I,\mathbb{C}) \ / \ f^2 \in \mathcal{L}^1(I,\mathbb{C})\}$: il s'agit de l'ensemble des fonctions continues intégrables. C'est un espace préhilbertien complexe. $\mathcal{L}^2\mathcal{C}(I,\mathbb{C})$ a une structure d'espace vectoriel. On définit alors :
$$\forall f,g \in \mathcal{L}^2\mathcal{C}(I,\mathbb{C}),\ (f \mid g) = \int_I \overline{f(t)}g(t)dt$$
- $\mathcal{L}^2\mathcal{C}(I,\mathbb{R}) = \{f \in \mathcal{C}(I,\mathbb{R}) \ / \ f^2 \in \mathcal{L}^1(I,\mathbb{R})\}$: il s'agit de l'ensemble des fonctions continues intégrables. $\mathcal{L}^2\mathcal{C}(I,\mathbb{R})$ a une structure d'espace vectoriel. Les propriétés de $\mathcal{L}^2\mathcal{C}(I,\mathbb{C})$ restent valables. On définit alors :
$$\forall f,g \in \mathcal{L}^2\mathcal{C}(I,\mathbb{R}),\ (f \mid g) = \int_I f(t)g(t)dt$$

Propriété : $\forall f,g \in \mathcal{L}^2\mathcal{C}(I,\mathbb{C}),\ f \times g \in \mathcal{L}^1\mathcal{C}(I,\mathbb{C})$.

Propriété : Si $f,g \in \mathcal{L}^2\mathcal{C}(I,\mathbb{K})$, alors :
$$|(f \mid g)| \leqslant N_1(fg) \leqslant N_2(f) \times N_2(g)$$

Proposition : convergence en moyenne et convergence des intégrales : Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{L}^1(I,\mathbb{K})$, soit $f \in \mathcal{L}^1(I,\mathbb{K})$. Si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en moyenne (i.e. au sens de N_1) vers f, alors :
$$\lim_{n\to+\infty} \int_I f_n = \int_I f$$

Théorème : convergence sur un segment et converge des intégrales : Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{C}([a,b],\mathbb{K})^{\mathbb{N}}$. Soit $f : [a,b] \to \mathbb{K}$. Si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f, alors :

- $f \in \mathcal{C}([a,b],\mathbb{K})$;
- $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en moyenne et en moyenne quadratique vers f et
$$\lim_{n\to+\infty} \int_{[a,b]} f_n = \int_{[a,b]} f$$

2 Le théorème de convergence dominée

Théorème : théorème de convergence dominée : Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{C}_m(I,\mathbb{K})$ et $f \in \mathcal{C}_m(I,\mathbb{K})$ telles que :

- $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers f
- et $\exists g \in \mathcal{L}^1(I,\mathbb{R}^+)\ /\ \forall n \in \mathbb{N},\ |f_n| \leqslant g$.

Alors :

- $f_n \in \mathcal{L}^1(I,\mathbb{K})$;
- $f \in \mathcal{L}^1(I,\mathbb{K})$ et

$$\lim_{n\to+\infty} \int_I f_n = \int_I f$$

3 Intégration terme à terme d'une série

Théorème 1 : cas d'un segment, convergence uniforme : Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{C}([a,b],\mathbb{K})$ et $S : [a,b] \to \mathbb{K}$. Si la série de fonction $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} f_n$ converge uniformément et a pour somme S, alors : $S \in \mathcal{C}([a,b],\mathbb{K})$ et

$$\int_a^b S(t)dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_a^b f_n(t)dt$$

Théorème 2 : conséquence du théorème de convergence dominée : Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{C}_m(I,\mathbb{R})^{\mathbb{N}}$. Si $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} f_n$ converge simplement et a pour somme $S \in \mathcal{L}^1(I,\mathbb{R}^+)$, alors :

$$\int_I S = \sum \int_I f_n$$

Théorème 3 : Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{L}^1(I,\mathbb{K})^{\mathbb{N}}$. Si $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} f_n$ convege simplement et a pour somme $S \in \mathcal{C}_m(I,\mathbb{K})$ et si $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \int |f_n|$ converge, alors

$$S \in \mathcal{L}^1(I,\mathbb{K}) \text{ et } \int_I S = \sum \int_I f_n \text{ i.e. } \int_I \sum_{n=0}^{+\infty} f_n = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_I f_n$$

4 Intégrale dépendant d'un paramètre

Théorème 1 : continuité sous le signe $\int$: Soit $f : \left\{ \begin{array}{l} A \times I \to \mathbb{K} \\ (x,t) \mapsto f(x,t) \end{array} \right.$ où $A \subset \mathbb{R}^n$, I est un intervalle de $\mathbb{R}$. On suppose que :

- $\forall t \in I,\ f(.,t) : \left\{ \begin{array}{l} A \to \mathbb{K} \\ x \mapsto f(x,t) \end{array} \right.$ est continue sur A ;
- $\forall x \in A,\ f(x,.) : \left\{ \begin{array}{l} I \to \mathbb{K} \\ t \mapsto f(x,t) \end{array} \right.$ est continue par morceaux sur I ;
- $\exists g \in \mathcal{L}^1(I,\mathbb{R}^+)\ /\ \forall (x,t) \in A \times I,\ |f(x,t)| \leqslant g(t)$

alors :

$$F : \left\{ \begin{array}{l} A \to \mathbb{K} \\ x \mapsto \displaystyle\int_I f(x,t)dt \end{array} \right. \text{ est continue.}$$

Corollaire : Soit $f \in \mathcal{C}([c,d]\times[a,b],\mathbb{K})$. Soit $F : \begin{cases} [c,d] \to \mathbb{K} \\ x \mapsto \displaystyle\int_a^b f(x,t)dt \end{cases}$, alors F est continue.

Théorème 2 : dérivation sous le signe $\displaystyle\int$: Soit $f : \begin{cases} J\times I \to \mathbb{K} \\ (x,t) \mapsto f(x,t) \end{cases}$. On suppose que :

- $\forall x \in J,\ f(x,.) \in \mathcal{L}^1(I,\mathbb{K})$;
- f admet sur $J\times I$ une dérivée partielle $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ qui vérifie :
  - $\forall t \in I,\ \dfrac{\partial f}{\partial x}(.,t) : \begin{cases} J \to \mathbb{K} \\ x \mapsto \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t) \end{cases}$ est continue sur J ;
  - $\forall x \in J,\ \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,.) : \begin{cases} I \to \mathbb{K} \\ t \mapsto \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t) \end{cases}$ est continue par morceaux sur I ;
  - $\exists g \in \mathcal{L}^1(I,\mathbb{R}^+)\ /\ \forall (x,t) \in J\times I,\ \left|\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \leqslant g(t)$

Alors $F : \begin{cases} J \to \mathbb{K} \\ x \mapsto \displaystyle\int_I f(x,t)dt = \int_I f(x,.) \end{cases}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur J et

$$\forall x \in J,\ F'(x) = \int_I \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)dt$$

5 La fonction Γ

Définition : On note Γ la fonction définie sur $\mathbb{R}^{+\star}$ par

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}dt$$

Propriétés : $\Gamma \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^{+\star},\mathbb{R})$ et $\forall x \in \mathbb{R}^{+\star},\ \forall k \in \mathbb{N}$,

$$\Gamma^{(k)}(x) = \int_0^{+\infty} (\ln t)^k\, t^{x-1}e^{-t}dt$$

$$\forall x \in \mathbb{R}^{+\star},\ \Gamma(x+1) = x\cdot\Gamma(x)$$

$$\forall n \in \mathbb{N},\ n! = \Gamma(n+1)$$