Chapitre 15 : intégrales doubles

31/1/2012

---

1 Cas d'une fonction continue sur un pavé

Théorème : un thérorème de Fubini pour les fonctions continues sur un pavé : Soit $f \in \mathcal{C}([a,b] \times [c,d], \mathbb{C})$ alors :

$$\int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)dx \right) dy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)dy \right) dx$$

Proposition : Si $f(x,y) = h(x) \times k(y)$ avec $h \in \mathcal{C}([a,b], \mathbb{R})$ et $k \in \mathcal{C}([c,d], \mathbb{R})$, alors :

$$\iint_{[a,b]\times[c,d]} f(x,y)dxdy = \iint_{[a,b]\times[c,d]} h(x) \cdot k(y)dxdy = \int_a^b h(x)dx \cdot \int_c^d k(y)dy$$

2 Cas d'une fonction positive sur $I \times J$

Définition : Soient I et J deux intervalles réels. Soit $f : I \times J \to \mathbb{R}^+$ continue.
f est dite intégrable sur $I \times J$ s'il existe $k \in \mathbb{R}^+$ tel que

- pour tout segment $I' \subset I$,
- pour tout segment $J' \subset J$,

on a

$$\iint_{I\times J} f \leqslant k$$

On appelle alors intégrale de f sur $I \times J$, que l'on note $\iint_{I\times J} f$ le nombre

$$\text{Sup} \left\{ \iint_{I'\times J'} f, \begin{array}{l} I' \text{ segment } / I' \subset I \\ J' \text{ segment } / J' \subset J \end{array} \right\}$$

Théorème : Soit $f \in \mathcal{C}(I \times J, \mathbb{R}^+)$. Soit $(I_n)_n$ une suite exhaustive de segments de I. Soit $(J_n)_n$ une suite exhaustive de segments de J.
Alors f est intégrable sur $I \times J$ si et seulement si

$$\lim_{n\to+\infty} \iint_{I_n\times J_n} f \text{ existe}$$

$$\text{et alors } \iint_{I\times J} f = \lim_{n\to+\infty} \iint_{I_n\times J_n} f$$

Théorème : théorème de Fubini pour les fonctions positives de $I \times J$: Soit $f \in \mathcal{C}(I \times J, \mathbb{R}^+)$. Si :

1. $\forall x \in I,\ f(x,.) \in \mathcal{L}^1(J, \mathbb{R})$
2. puis la fonction $g : \begin{cases} I \to \mathbb{R}^+ \\ x \mapsto \displaystyle\int_J f(x,.) \end{cases}$ est intégrable sur I,

Alors f est intégrable sur $I \times J$ et

$$\iint_{I\times J} = \int_I g = \int_I \left(\int_J f(x,.) \right) dx$$

Ou encore

$$\iint_{I\times J} f(x,y)dxdy = \int_I \left(\int_J f(x,y)dy \right) dx$$

Noter que l'on peut « inverser » les rôles de x et y dans les hypothèses.

3 Cas d'une fonction de $I \times J$ dans $\mathbb{C}$

Définition : Soit $f \in \mathcal{C}(I \times J, \mathbb{C})$.
f est dite intégrable si $|f|$ est intégrable.

Cas d'une fonction à valeurs réelles : Soit $f \in \mathcal{C}(I \times J, \mathbb{R})$. On pose $f^+ = \mathrm{Max}(f, 0)$ et $f^- = \mathrm{Max}(-f, 0)$.
f est intégrable sur $I \times J \Leftrightarrow f^+$ et f^- sont intégrables sur $I \times J$ et alors

$$\iint_{I\times J} f = \iint_{I\times J} f^+ - \iint_{I\times J} f^-$$

Cas d'une fonction à valeurs complexes : Soit $f \in \mathcal{C}(I \times J, \mathbb{C})$.
f est intégrable sur $I \times J \Leftrightarrow Re(f)$ et $Im(f)$ sont intégrables sur $I \times J$ et alors

$$\iint_{I\times J} f = \iint_{I\times J} Re(f) + i \iint_{I\times J} Im(f)$$

Théorème de Fubini pour les fonctions à valeurs dans $\mathbb{K}$: Soit $f \in \mathcal{C}(I \times J, \mathbb{K})$ avec f intégrable. Si :

- $\forall x \in I,\ f(x,.) \in \mathcal{L}^1(J, \mathbb{K})$
- puis $g : \begin{cases} I \to \mathbb{K} \\ x \mapsto \displaystyle\int_J f(x,.) = \int_J f(x,y)dy \end{cases} \in \mathcal{L}^1(I, \mathbb{K})$

alors :

$$\iint_{I\times J} f = \int_I g = \int_I \left(\int_J f(x,y)dy \right) dx$$

4 Intégrale sur une partie simple

Définition : Une partie A de $\mathbb{R}^2$ est dite élémentaire si on peut l'écrire à la fois

- $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ a \leqslant x \leqslant b \text{ et } \varphi_1(x) \leqslant y \leqslant \varphi_2(x)\}$
- $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ c \leqslant y \leqslant d \text{ et } \psi_1(y) \leqslant x \leqslant \psi_2(y)\}$

où φ_1, φ_2 (resp. ψ_1, ψ_2) sont continues sur $[a, b]$ (resp. sur $[c, d]$).

Propriété : En reprenant les notations de la définition précédente,

$$A \subset [a,b] \times [c,d]$$

et en particulier, toute partie élémentaire est compacte.

Conséquence : Soit $f \in \mathcal{C}(\Delta, \mathbb{K})$ où Δ est une partie élémentaire incluse dans $[a,b] \times [c,d]$. Soit $\widehat{f} : \left\{ \begin{array}{l} [a,b] \times [c,d] \to \mathbb{K} \\ (x,y) \mapsto \left| \begin{array}{l} f(x,y) \text{ si } (x,y) \in A \\ 0 \text{ si } (x,y) \notin A \end{array} \right. \end{array} \right.$. Alors :

$$\forall x \in [a,b],\ \widehat{f}(x,.) \in \mathcal{C}_m([c,d], \mathbb{K})$$

$$\forall y \in [c,d],\ \widehat{f}(.,y) \in \mathcal{C}_m([a,b], \mathbb{K})$$

Autre conséquence : Soit $f \in \mathcal{C}(\Delta, \mathbb{K})$ où Δ est une partie élémentaire incluse dans $[a,b] \times [c,d]$ et soit $\widehat{f}$ le prolongement défini précédement.

- $\forall x \in [a,b]$, comme $\widehat{f}(x,.) \in \mathcal{C}_m([c,d], \mathbb{K})$, on peut définir $h(x) = \displaystyle\int_{[c,d]} \widehat{f}(x,.)$;
- $\forall y \in [c,d]$, comme $\widehat{f}(.,y) \in \mathcal{C}_m([a,b], \mathbb{K})$, on peut définir $k(x) = \displaystyle\int_{[a,b]} \widehat{f}(.,y)$.

Lemme : Les fonctions h et k aisni définies sont continues respectivement sur $[a,b]$ et $[c,d]$.

Théorème : théorème de Fubini sur une partie élémentaire : Soit $f \in \mathcal{C}(A, \mathbb{K})$ où A est une partie élémentaire de $\mathbb{R}^2$. Soient h et k telles que $h(x) = \displaystyle\int_{[c,d]} \widehat{f}(x,.)$ et $k(x) = \displaystyle\int_{[a,b]} \widehat{f}(.,y)$. Alors

$$\int_{[a,b]} h = \int_{[c,d]} k$$

ce qui signifie que si

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ a \leqslant x \leqslant b \text{ et } \varphi_1(x) \leqslant y \leqslant \varphi_2(x)\}$$

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ c \leqslant y \leqslant d \text{ et } \psi_1(y) \leqslant x \leqslant \psi_2(y)\}$$

alors,

$$\int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y) dy \right) dx = \int_c^d \left(\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y) dx \right) dy$$

Définition : Ce nombre commun s'appelle l'intégrale double de f sur A et est noté

$$\iint_A f \text{ ou } \iint_A f(x,y) dx dy$$

Définition : partie simple : On appelle partie simple du plan toute réunion finie $\displaystyle\bigcup_{i=1}^{n} A_i$ de parties élémentaires avec la condition :

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ \text{si } i \neq j,\ \overbrace{A_i \cap A_j}^{\circ} = \varnothing$$

Définition : Soit $f \in \mathcal{C}(A, \mathbb{K})$ où A est une partie simple. On définit alors

$$\iint_A f = \sum_{i=1}^{n} \iint_{A_i} f \text{ si } A = \bigcup_{i=1}^{n} A_i,\ \ A_i \text{ partie élémentaire.}$$

5 Changement de variable dans les intégrales doubles

Définition : $\mathbb{C}^1$-difféomorphsime : Soient U et V deux ouverts de $\mathbb{R}^n$. Soit $\varphi : U \to V$. On dit que φ est un $\mathbb{C}^1$-difféomorphisme si φ est bijective et φ et φ^{-1} sont de classe $\mathcal{C}^1$.

Définition : matrice jacobienne : Soit $\varphi \in \mathcal{C}^1(U, V)$ où U, V sont deux ouverts de $\mathbb{R}^2$. Ainsi $\varphi : \begin{cases} U \to V \\ (u,v) \mapsto (x(u,v), y(u,v)) \end{cases}$ avec $x, y \in \mathcal{C}^1(U, \mathbb{R})$ Elles admettent donc des dérivées partielles.
La matrice jacobienne de φ au point $(u, v) \in U$ est la matrice :

$$J_\varphi(u,v) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u}(u,v) & \dfrac{\partial x}{\partial v}(u,v) \\ \dfrac{\partial y}{\partial u}(u,v) & \dfrac{\partial y}{\partial v}(u,v) \end{pmatrix}$$

Jacobien de φ en (u, v) : c'est le déterminant de $J_\varphi(u, v)$.

$$\mathrm{jac}_\varphi(u,v) \text{ ou } \mathrm{jac}(\varphi)(u,v) = \det\left(J_\varphi(u,v)\right) \underset{\text{souvent}}{\overset{\text{noté}}{=}} \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}(u,v)$$

Théorème : théorème de changement de variable dans $\mathbb{R}^2$: Soient U et V deux ouverts de $\mathbb{R}^2$. Soit φ un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de U dans V. Soit $\varphi \in \mathcal{C}(A, B)$ où A et B sont deux parties simples de $\mathbb{R}^2$ telles que $A \subset U,\ B \subset V,\ \varphi(A) = B$. Alors :

$$\iint_B f = \iint (f \circ \varphi) \times |\mathrm{jac}(\varphi)|$$

$$\text{i.e. } \iint_B f(x,y)dxdy = \iint_A f\big(x(u,v), y(u,v)\big) \times \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}(u,v)\right| dudv$$

Proposition : Si $\varphi \in \mathcal{C}^1(U, V)$ avec U et V deux ouverts de $\mathbb{R}^2$, et si $\mathrm{jac}(\varphi)$ ne s'annule pas sur U (i.e. J_φ est inversible) et si φ est bijective, alors φ est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme.