Chapitre 16 : séries de Fourier

7/2/2012

1 Champs d'application de la théorie

Les applications 2π-périodiques : Les ensembles suivant sont inclus dans $\mathcal{B}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$:
- $\mathcal{CM}_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$: fonctions continues par morceaux sur $\mathbb{R}$ et 2π-périodiques ;
- $\mathcal{C}_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$: fonctions continues sur $\mathbb{R}$ et 2π périodiques ;
- $\mathcal{C}^1\mathcal{M}_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})(\mathbb{R}, \mathbb{C})$: fonctions $\mathbb{C}^1$ par morceaux et 2π-périodiques.

Définition : fonction $\mathbb{C}^1$ par morceaux sur $\mathbb{R}$: Soit $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$. On dit que f est $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $\mathbb{R}$ si f est $\mathbb{C}^1$ par morceaux sur tout segments $[a, b]$ de $\mathbb{R}$ i.e. $\exists \sigma = (a = a_0, a_1, \dots, a_n = b)$ une subdivision de $[a, b]$ telle que pour tout entier naturel de $[\![0, n-1]\!]$, la restriction de f à tout inter $]a_i, a_{i+1}[$ est prolongeable sur $[a_i, a_{i+1}]$ en une fonction $\mathbb{C}^1$ et notamment, f ainsi prolongée admet respectivement en a_i et a_{i+1} une dérivée respectivement à gauche et à droite.
On note $\mathcal{C}^1\mathcal{M}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ l'ensemble des fonctions $\mathbb{C}^1$ continues par morceaux de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{C}$.

Propriété : prolongement par périodicité : Soit $f \in \mathcal{C}_m([a, a+2\pi], \mathbb{C})$ telle que $f(a) = f(a+2\pi)$. Alors, il existe une unique fonction $g \in \mathcal{CM}_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ telle que :

$$g_{|[a,a+2\pi]} = f$$

Variante : Soit $f \in \mathcal{C}_m([a, a+2\pi[, \mathbb{C})$ et telle que $\lim\limits_{x \to a^-} f(x+2\pi)$ existe dans $\mathbb{C}$, alors :

$$\exists! g \in \mathcal{CM}_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C}) \ / \ g_{[a,a+2\pi[} = f$$

Proposition : rappels intégration : SOit $f \in \mathcal{CM}_T(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ (i.e. une fonction continue par morceaux T-périodique. Soient $a, b \in \mathbb{R}$, alors :

$$\int_{a+T}^{b+T} f(t)dt = \int_a^b f(t)dt$$

$$\int_a^{a+T} f(t)dt = \int_0^T f(t)dt = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)dt$$

2 Coefficients de Fourier

Définition 1 : Soit $f \in \mathcal{CM}_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$. On pose pour tout $n \in \mathbb{Z}$:

$$c_n(f) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cdot e^{-int}dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)e^{-int}dt$$

$c_n(f)$ est le coefficient de Fourier de f d'indice n.

Définition 2 : Soit $f \in \mathcal{CM}_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Soit $n \in \mathbb{N}$. On pose :

$$a_n(f) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cdot \cos(nt)dt = \frac{1}{\pi} \int_{0}^{2\pi} f(t) \cdot \cos(nt)dt$$

$$b_n(f) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cdot \sin(nt)dt = \frac{1}{\pi} \int_{0}^{2\pi} f(t) \cdot \sin(nt)dt$$

sont les coefficients de Fourier réels de f.

Propriétés : liens entre les coefficients a_n, b_n et c_n :

$$c_n = \frac{1}{2}(a_n - i \cdot b_n) \qquad c_{-n} = \frac{1}{2}(a_n + i \cdot b_n)$$

$$a_n = c_n + c_{-n} = 2Re(c_n) \qquad b_n = i \cdot (c_n - c_{-n}) = -2Im(c_n)$$

Propriété : effet de conjugaison :

$$c_n(\overline{f}) = \overline{c_{-n}(f)}$$

Propriété : effets de parité :

	f paire	f impaire
$\mathbb{K} = \mathbb{C}$	$c_{-n} = c_n$	$c_{-n} = -c_n$
$\mathbb{K} = \mathbb{R}$	$a_n(f) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(t) \cdot \cos(nt)dt$ $b_n(f) = 0$	$a_n(f) = 0$ $b_n(f) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(t) \cdot \sin(nt)dt$

Propriété : effet d'une translation dans le temps : Soit $f \in \mathcal{CM}_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, soit $a \in \mathbb{R}$.
Soit $f_a : \left\{ \begin{array}{l} R \to \mathbb{C} \\ t \mapsto f(t+a) \end{array} \right.$. Alors :

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \ c_n(f_a) = e^{ina} \cdot c_n(f)$$

Propriété : linéarité de $f \mapsto (c_n(f))_{n\in\mathbb{Z}}$: Soit $\Phi : \left\{ \begin{array}{l} \mathcal{CM}_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C}) \to \mathbb{C}^{\mathbb{Z}} \\ f \mapsto (c_n(f))_{n\in\mathbb{Z}} \underset{\text{notation}}{\overset{\text{autre}}{=}} \left(\hat{f}(n)\right)_{n\in\mathbb{Z}} = \hat{f} \end{array} \right.$.

Φ est linéaire.

Propriété : La famille $(c_n(f))_{n\in\mathbb{Z}}$ est bornée et donc les familles $(a_n(f))_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n(f))_{n\in\mathbb{N}}$ aussi.

Utilisation d'espaces vectoriels normés : Pour $\mathcal{C}_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, prenons :

$$\|f\|_1 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|dt$$

Considérons $\tilde{\Phi} : \left\{ \begin{array}{l} \mathcal{C}_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C}) \to \mathcal{B}(\mathbb{Z}, \mathbb{C}) \\ f \mapsto (c_n(f))_{n\in\mathbb{Z}} \end{array} \right.$. On considère comme norme sur $\mathcal{B}(\mathbb{Z}, \mathbb{C})$:

$$\|u\|_\infty = \underset{n\in\mathbb{Z}}{\text{Sup}}|u_n|$$

Ainsi,

$$|||\tilde{\Phi}||| = 1$$

Proposition 1 : Soit $f \in \mathcal{CM}_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$. Alors :

$$\lim_{n \to +\infty} c_n(f) = 0 = \lim_{n \to +\infty} c_{-n}(f)$$

et si $f \in \mathcal{CM}_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$,

$$\lim_{n \to +\infty} a_n(f) = 0 = \lim_{n \to +\infty} b_n(f)$$

Propriété : effet de la dérivation : Soit $f \in \mathcal{C}^1_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$. Alors :

$$\forall n \in \mathbb{Z},\ c_n(f') = in \cdot c_n(f)$$

Propriété : généralisation : Si $f \in \mathcal{C}^k_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, alors :

$$\forall n \in \mathbb{Z},\ c_n\left(f^{(k)}\right) = i^k n^k \cdot c_n(f)$$

Proposition 2 : Si $f \in \mathcal{C}^k_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, alors :

$$c_n(f) = o\left(\frac{1}{n^k}\right) \qquad c_{-n}(f) = o\left(\frac{1}{n^k}\right)$$

et si $f \in \mathcal{C}^k_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, alors :

$$a_n = o\left(\frac{1}{n^k}\right) \qquad b_n = o\left(\frac{1}{n^k}\right)$$

3 Convergence ponctuelle des séries de Fourier

Définitions : Soit $f \in \mathcal{CM}_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ respectivement $\mathcal{CM}_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$

- On appelle série de Fourier de f la série (« trigonométrique ») de fonction :

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n(f) e^{inx} \qquad \text{resp. } \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{n \in \mathbb{Z}} \Big(a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)\Big)$$

- On appelle somme partielle d'ordre N la fonction :

$$x \mapsto \sum_{n=-N}^{N} c_n(f) e^{inx} \qquad \text{resp. } x \mapsto \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{n=1}^{N} \Big(a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)\Big)$$

- On dit que la série de Fourier converge simplement sur I si :

$$\forall x \in I,\ \lim_{N \to +\infty} \sum_{n=-N}^{N} \left(c_n(f) e^{inx}\right) \text{ existe dans } \mathbb{C}$$

$$\forall x \in I,\ \lim_{N \to +\infty} \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{n=1}^{N} \Big(a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)\Big) \text{ existe dans } \mathbb{R}$$

Propriété : La somme $S(f)$ de la série de Fourier de f est évidemment 2π-périodique.

Théorème : théorème de Dirichlet : Soit $f \in \mathcal{C}^1\mathcal{M}_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$. Alors pour tout réel x, la série de Fourier de f converge et a pour somme :

$$\frac{1}{2}\left(\lim_{y \to x^+} f(y) + \lim_{y \to x^-} f(y)\right)$$

Corollaire 1 : Si $f \in \mathcal{C}^1\mathcal{M}_{2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{C})$, alors $S(f)(x) = f(x)$ en tout point x où f est continue.

Corollaire 2 : Si $f \in \mathcal{C}^1\mathcal{M}_{2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{C}) \cap \mathcal{C}_{2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{C})$, alors

$$S(f) = f$$

4 Convergence quadratique de séries de Fourier

Produit scalaire : On pose pour $f, g \in \mathcal{C}_{2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{C})$:

$$(f \mid g) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \overline{f(t)}g(t)dt$$

$(. \mid .)$ est un produit scalaire complexe.
On lui associe la norme :

$$\|f\|_2 = \sqrt{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2\, dt}$$

Coefficients et sommes partielles de Fourier : On pose $e_n : \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{C} \\ t \mapsto e^{int} \end{array} \right.$, $n \in \mathbb{Z}$. Alors $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est orthonormale.

$$c_n(f) = (e_n \mid f)$$

$$\forall N \in \mathbb{N},\ S_N(f) = \sum_{n=-N}^{N} (e_n \mid f) \cdot e_n$$

Définition : On note $\mathcal{P} = \bigcup_{N\in\mathbb{N}} \mathcal{P}_n = Vect\left(\{e_n,\ n \in \mathbb{Z}\}\right)$. $\mathcal{P}$ est l'ensemble des « polynômes trigonométriques ». Un polynôme trigonométrique s'écrit donc :

$$p(t) = \sum_{n=-N}^{N} a_n e^{int} = \sum_{n=-N}^{N} a_n \left(e^{it}\right)^n$$

Théorème : inégalité de Bessel : Soit $f \in \mathcal{CM}_{2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{C})$. Alors :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \sum_{n=-N}^{N} |c_n(f)|^2 \leqslant \|f\|_2{}^2$$

Dans le cas où $f \in \mathcal{CM}_{2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{R})$, l'inégalité devient :

$$\frac{a_0(f)^2}{4} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N}\left(a_n(f)^2 + b_n(f)^2\right) \leqslant \|f\|_2{}^2$$

Corollaire : Les séries suivantes sont toutes convergentes :

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} |c_n(f)|^2 \qquad \sum_{n\in\mathbb{N}} |c_{-n}(f)|^2 \qquad \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n(f)^2 \qquad \sum_{n\in\mathbb{N}^\star} b_n(f)^2$$

Et si $f \in \mathcal{CM}_{2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{R})$:

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n(f)|^2 = \frac{a_0(f)^2}{4} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}\left(a_n(f)^2 + b_n(f)^2\right)$$

Lemme 1 : Soit $f \in \mathcal{C}_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$.

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists h \in \mathcal{C}_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C}) \ / \ h \text{ est affine par morceaux et } \|f - h\|_\infty \leqslant \varepsilon$$

Lemme 2 : Théorème de Weirtrass trigonométrique : Soit $f \in \mathcal{C}_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$. Alors :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists p \in \mathcal{P} \ / \ \|f - p\| \leqslant \varepsilon$$

Théorème : convergence en moyenne quadratique : Soit $f \in \mathcal{CM}_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$. La série de Fourier de f converge en moyenne quadratique vers f i.e.

$$S_n(f) \xrightarrow{\|\cdot\|_2} f$$

Théorème : égalité de Bessel Parseval : $\forall f \in \mathcal{CM}_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{K})$,

$$\|f\|_2{}^2 = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n(f)|^2 \ \text{ si } \mathbb{K} = \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C}$$

$$\|f\|_2{}^2 = \frac{a_0(f)^2}{4} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} \left(a_n(f)^2 + b_n(f)^2\right) \ \text{ si } \mathbb{K} = \mathbb{R}$$

Proposition : Soient $f, g \in \mathcal{CM}_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{K})$.

$$(f \mid g) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \overline{c_n(f)} \cdot c_n(g) \text{ si } \mathbb{K} = \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C}$$

$$(f \mid g) = \frac{a_0(f) \cdot a_0(g)}{4} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} \big(a_n(f) \cdot a_n(g) + b_n(f) \cdot b_n(g)\big) \text{ si } \mathbb{K} = \mathbb{R}$$

5 Convergence normale pour les fonctions continues et $\mathcal{C}^1$ par morceaux 2π-périodiques à valeurs complexes

Proposition : Soit $f \in \mathcal{C}_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C}) \cap \mathcal{C}^1\mathcal{M}_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$. Alors les séries suivantes sont absolument convergentes :

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} c_n(f) \qquad \sum_{n \in \mathbb{N}} c_{-n}(f) \qquad \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n(f) \qquad \sum_{n \in \mathbb{N}} b_n(f)$$

Théorème : Si $f \in \mathcal{C}_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C}) \cap \mathcal{C}^1\mathcal{M}_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, alors la série de Fourier converge normalement vers f.