Chapitre 17 : fonctions de plusieurs variables

15/2/2012

---

1 Rappels de MPSI et synthèse

$f : I \to \mathbb{R},\ I \subset \mathbb{R}$:

$$f \text{ est dérivable en } a \in I \ \Leftrightarrow\ \exists A \in \mathbb{R} \ / \ \forall h \in \mathbb{R} \ / \ (a+h) \in I,\ f(a+h) = f(a) + A \cdot h + o(h)$$

On note $A = f'(a)$ et $df(a) : h \mapsto A \cdot h = f'(a) \cdot h$.
$df(a) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, $M_{\mathcal{C}_1} = \Big(f'(a)\Big)$.
$\overrightarrow{F} : \begin{cases} I \to \mathbb{R}^2 \\ t \mapsto \big(x(t), y(t)\big) \end{cases}$ notée $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$

$$\overrightarrow{F} \text{ est dérivable en } a \in I \Leftrightarrow\ x \text{ et sont dérivable en } a$$

$$\Leftrightarrow \exists(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 \ / \ \forall h \in \mathbb{R} \ / \ (a+h) \in I, \begin{cases} x(a+h) = x(a) + \alpha h + h\varepsilon_1(h) \\ y(a+h) = y(a) + \beta h + h\varepsilon_2(h) \end{cases}$$

On note $df(a) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^2)$ telle que $M_{\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2}(df(a)) = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$.
$f : U \to \mathbb{R}$ où U est un ouvert de $\mathbb{R}^2$. Pour $a = (x_0, y_0) \in U$,

$$\forall \vec{h} = (h_1, h_2) \in \mathbb{R}^2 \ / \ a + \vec{h} \in U,\ f(a + \vec{h}) = f(a) + \frac{\partial f}{\partial x}(a) \cdot h_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(a) \cdot h_2 + o(\|h\|)$$

On note $df(a) : \begin{cases} \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \\ (h_1, h_2) \mapsto \dfrac{\partial f}{\partial x}(a) \cdot h_1 + \dfrac{\partial f}{\partial y}(a) \cdot h_2 \end{cases}$.

$$df(a) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^{\not{2}}, \mathbb{R}) : M_{\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2}\Big(df(a)\Big) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x}(a) & \dfrac{\partial f}{\partial y}(a) \end{pmatrix}$$

$\overrightarrow{F} : U \to \mathbb{R}^2$ où U est un ouvert de $\mathbb{R}^2$. Soit $a = (x_0, y_0)$. $\overrightarrow{F}(a) = (f_1(x_0, y_0), f_2(x_0, y_0))$. Soit $\overrightarrow{h} = (h_1, h_2)$ tel que $a + \overrightarrow{h} \in U$.

$$\overrightarrow{F}(x_0 + h_1, y_0 + h_2) = \overrightarrow{F}(x_0, y_0) + \underbrace{\begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x}(a) & \dfrac{\partial f_1}{\partial y}(a) \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x}(a) & \dfrac{\partial f_2}{\partial y}(a) \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix}}_{d\overrightarrow{F}(a)(h_1, h_2)} + \|\overrightarrow{h}\| \cdot \overrightarrow{\varepsilon(\overrightarrow{h})}$$

Ainsi $d\overrightarrow{F}(a) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$.

2 Fonctions différentiables

Définition : différentielle Soit $f : U \to F$ où U est un ouvert de E, E et F étant des $\mathbb{R}$-espaces vectoriel de dimensions finies. Soit $a \in U$.
On dit que f est différentiable en a s'il existe une application $\varphi \in \mathcal{L}(E,F)$ telle que :

$$\forall h \in E \ / \ (a+h) \in U, \ f(a+h) = f(a)\varphi(h) + o\left(\|h\|\right)$$

On note $df(a)$ la fonction φ : on l'appelle la différentielle de f au pouint a.

Propriété : L'application φ définie précédement, si elle existe, est unique.

3 Dérivées partielles

Définition : dérivée selon un vecteur : Soit $f : U \to F, \ a \in U, \ \overrightarrow{u} \in E \ / \ \overrightarrow{u} \neq O_E$. Soit $\varphi_{a,\overrightarrow{u}} : \begin{cases}]-r,r[\to F \\ t \mapsto f(a+t\overrightarrow{u}) \end{cases}$ (un tel $r > 0$ existe).

On appelle dérivée de f au point a selon le vecteur $\overrightarrow{u}$ le nombre $D_{\overrightarrow{u}}f(a) = \varphi'_{a,\overrightarrow{u}}(0) \left(\underset{\text{aussi}}{\overset{\text{notée}}{=}} \dfrac{\partial f}{\partial u}\right)$.

$$D_{\overrightarrow{u}}f(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h\overrightarrow{u}) - f(a)}{h}$$

Définition : dérivées partielles : Soit $f : U \to F$ où U ouvert de E, E et F étant deux $\mathbb{R}$-espaces vectoriels de dimensions finies. Soit $a \in U$. Soit $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_q)$ une base de E.
La dérivées de f en a selon $\overrightarrow{e_j}$ s'appelle la dérivée partielle d'indice j au point a et est notée $D_j(a)$, ainsi,

$$D_j(f(a)) = D_{\overrightarrow{e_j}}f(a)$$

Si $E = \mathbb{R}^q$ et si $\mathcal{B} = \mathcal{C}_q$, base canonique de $\mathbb{R}^q$, on notera $\dfrac{\partial .}{\partial x_j}$ au lieu de $D_j f$.
Les dérivées partielles en a sont les coordonées de $df(a)$ dans la base duale.

Théorème : Soit $f : U \to F, \ a \in U$. Si f est différentiable en a, alors f admet selon tout vecteur $\overrightarrow{u}$ non nul une dérivée égale à :

$$D_{\overrightarrow{u}}f(a) = df(a)(\overrightarrow{u})$$

Définition : matrice jacobienne : Soit $f : U \subset E \to F, \ a \in U$. Soient $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_q)$, (resp. $\mathcal{C} = (v_1, \ldots, v_p)$ une base de E (resp. une base de F).
On suppose que f admet des dérivées partielles (relativement à ces bases) au point a. On appelle matrice jacobienne de f au point a relativement aux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ la matrice :

$$\mathcal{J}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f)(a) = \Big(D_j(f_i)(a)\Big)_{i,j}$$

Si $E = \mathbb{R}^q$ et $F = \mathbb{R}^p$, si on choisit les bases canoniques, on note :

$$\mathcal{J}_{\mathcal{B}}(f)(a) = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a)\right)$$

où f_i fonction i^{e} coordonnée de f dans $(v_i)_{i=1..p}$.

Proposition : Si f est différentiable au point a, alors $\mathcal{J}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f)(a) = M_{\mathcal{B},\mathcal{C}}\Big(df(a)\Big)$.

Définition : jacobien : Si $f : U \subset E \to E$ et si $a \in U$, on appelle jacobien de f en a relativement à la base $\mathcal{B}$ de E le déterminant de $\mathcal{J}_{\mathcal{B}}(f)(a)$ noté $\mathrm{jac}(f)(a)$. En particulier, si $E = R^n$,

$$\mathrm{jac}(f)(a) = \det\left(\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a)\right)_{i,j}\right) \underset{\text{aussi}}{\overset{\text{notée}}{=}} \frac{\partial(f_1,\dots,f_n)}{\partial(x_1,\dots,x_n)}(a)$$

4 Fonctions de classe $\mathcal{C}^1$

Définition : Soit $f : U \subset E \to F$. Soit $\mathcal{B} = (e_j)_{j=1..q}$ une base de E.
On dit que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur U et on écrit $f \in \mathcal{C}^1(U,F)$ si elle admet des fonctions dérivées partielles sur U continues i.e. $\forall j \in [\![1,q]\!],\ D_j f$ est définie en tout point de U et est continue.

Théorème : Toute fonction différentiable en a est continue en a.

Théorème : Tout application de classe $\mathcal{C}^1$ sur U est différentiable sur U.

Proposition : Si $f \in \mathcal{C}^1(U,F)$, pour tout $u \in E \setminus \{O_E\}$, la fonction $D_{\overrightarrow{u}}(f)$ est continue sur U.

5 Composition de fonctions

Rappel de Sup

- $\begin{array}{ccccc} I\subset\mathbb{R} & \overset{\varphi}{\to} & J & \overset{f}{\to} & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \varphi(t) & \mapsto & f\left(\varphi(t)\right) \end{array}$. Si $\varphi \in \mathcal{D}(I,J)$ et $f \in \mathcal{D}(J,\mathbb{R})$, alors $(f\circ\varphi) \in \mathcal{D}(I,\mathbb{R})$ et $\forall t \in I$,

$$(f\circ\varphi)'(t) = f'\big(\varphi(t)\big)\times\varphi'(t)$$

- $\begin{array}{ccccc} I\subset\mathbb{R} & \overset{\varphi}{\to} & U\subset\mathbb{R}^2 & \overset{f}{\to} & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \varphi(t) & \mapsto & f\left(\varphi(t)\right) \end{array}$, $\varphi(t) = \big(x(t),y(t)\big)$. $F = f\circ\varphi)$.

$$F'(t) = \frac{\partial f}{\partial x}\big(\varphi(t)\big)\times x'(t) + \frac{\partial f}{\partial y}\big(\varphi(t)\big)\times y'(t)$$

Remarque : la matrice jacobienne de f au point $\varphi(t)$ est : $\begin{pmatrix}\frac{\partial f}{\partial x}\big(\varphi(t)\big) & \frac{\partial f}{\partial y}\big(\varphi(t)\big)\end{pmatrix}$ et celle de φ au point t est $\big(\varphi'(t)\big)$ et celle de $F = (f\circ\varphi)$ est :

$$\begin{pmatrix}\frac{\partial f}{\partial x}\big(\varphi(t)\big) & \frac{\partial f}{\partial y}\big(\varphi(t)\big)\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}x'(t)\\ y'(t)\end{pmatrix}$$

i.e. $\mathcal{J}(f\circ\varphi)(t) = \mathcal{J}(f)\big(\varphi(t)\big)\times\mathcal{J}(\varphi)(t)$ et ainsi,

$$d(f\circ\varphi)(t) = df\big(\varphi(t)\big)\circ d\varphi(t)$$

- $\begin{array}{ccccc} V \subset \mathbb{R}^2 & \overset{\Phi}{\to} & U \subset \mathbb{R}^2 & \overset{f}{\to} & \mathbb{R} \\ (u,v) & \mapsto & \big(x(u,v), y(u,v)\big) & \mapsto & f\,(x,y) \end{array}$, $\Phi(u,v) = \big(x(u,v), y(u,v)\big)$. $F = f \circ \Phi$.

$$\frac{\partial F}{\partial u}(u,v) = \frac{\partial f}{\partial x}\big(\Phi(u,v)\big) \times \frac{\partial x}{\partial u}(u,v) + \frac{\partial f}{\partial y}\big(\Phi(u,v)\big) \times \frac{\partial y}{\partial u}(u,v)$$

$$\frac{\partial F}{\partial v}(u,v) = \frac{\partial f}{\partial x}\big(\Phi(u,v)\big) \times \frac{\partial x}{\partial v}(u,v) + \frac{\partial f}{\partial y}\big(\Phi(u,v)\big) \times \frac{\partial y}{\partial v}(u,v)$$

Remarque :

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial F}{\partial u}(u,v) & \dfrac{\partial F}{\partial v}(u,v) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) & \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u}(u,v) & \dfrac{\partial x}{\partial v}(u,v) \\ \dfrac{\partial y}{\partial u}(u,v) & \dfrac{\partial y}{\partial v}(u,v) \end{pmatrix}$$

i.e. $\mathcal{J}(F)(u,v) = \mathcal{J}(f)(x,y) \times \mathcal{J}(\Phi)(u,v)$ et ainsi,

$$d(f \circ \Phi)(a) = df\big(\Phi(a)\big) \circ d\Phi(a)$$

- $\begin{array}{ccccc} U \subset \mathbb{R}^2 & \overset{\Phi}{\to} & \mathbb{R} & \overset{f}{\to} & \mathbb{R} \\ (u,v) & \mapsto & \Phi(u,v) & \mapsto & f\big(\Phi((u,v))\big) \end{array}$.

$$\frac{\partial F}{\partial u}(u,v) = f'\big(\Phi(u,v)\big) \times \frac{\partial \Phi}{\partial u}(u,v)$$

$$\frac{\partial F}{\partial v}(u,v) = f'\big(\Phi(u,v)\big) \times \frac{\partial \Phi}{\partial v}(u,v)$$

Remarque :

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial F}{\partial u}(u,v) & \dfrac{\partial F}{\partial v}(u,v) \end{pmatrix} = \big(f'(x)\big) \times \begin{pmatrix} \dfrac{\partial \Phi}{\partial u}(u,v) & \dfrac{\partial \Phi}{\partial v}(u,v) \end{pmatrix}$$

i.e. $\mathcal{J}(F)(u,v) = \mathcal{J}(f)(\Phi(u,v)) \times \mathcal{J}(\Phi)(u,v)$ et ainsi,

$$d(f \circ \Phi)(a) = df\big(\Phi(a)\big) \circ d\Phi(a)$$

Théorème : Soient $f : U \subset E \to V \subset F$ et $g : V \subset F \to G$.
Si $f \in \mathcal{C}^1(U,V)$ et $g \in \mathcal{C}^1(V,G)$, alors $g \circ f \in \mathcal{C}^1(U,G)$ et

$$\forall a \in U,\ d(g \circ f)(a) = \Big(dg\big(f(a)\big)\Big) \circ \Big(df(a)\Big)$$

Matrice jacobienne de la fonction réciproque : Soit $f : U \subset E \to V \subset E$ un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme.

$$\forall b \in V,\ df^{-1}(b) = \Big(df\big(f^{-1}(b)\big)\Big)^{-1}$$

$$\mathcal{J}_{\mathcal{B}}\left(f^{-1}\right)(b) = \Big(\mathcal{J}_{\mathcal{B}}(f)\big(f^{-1}(b)\big)\Big)^{-1}$$

$$\mathrm{jac}\left(f^{-1}\right)(b) = \frac{1}{\mathrm{jac}(f)\left(f^{-1}(b)\right)}$$

6 Dérivées partielles d'ordre supérieure

Définition : fonction de classe $\mathcal{C}^2$: Soit $f \in \mathcal{C}^1(U, F)$, $U \subset E$. Soit $(e_j)_{j=1..q}$ une base de E. Alors $D_j(f) = D_{e_j}(f)$ est aussi une application de U dans F.
Si toutes les fonctions $D_i\big(D_j(f)\big)$, $(i, j) \in [\![1, q]\!]^2$ existent et sont continues, on dit que f est de classe $\mathcal{C}^2$ et on note $D^2_{i,j}(f) = D_i\big(D_j(f)\big)$.

Définition : fonction de classe $\mathcal{C}^k$: Pour $k \geqslant 2$, f est de classe $\mathcal{C}^k$ si et seulement si f est de classe $\mathcal{C}^1$ et $\forall i \in [\![1, q]\!]$, $D_i(f) \in \mathcal{C}^{k-1}(U, F)$.

Théorème : théorème de Schwarz : Si $f \in \mathcal{C}^2(U, F)$,

$$\forall i, j \in [\![1, q]\!]^2,\ D_j\big(D_i(f)\big) = D_i\big(D_j(f)\big)$$

Notamment pour $E = \mathbb{R}^n$, $F = \mathbb{R}$, si $f \in \mathcal{C}^2(U, \mathbb{R})$,

$$\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right) = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right)$$

7 Cas des fonctions à valeurs réelles

Définition : Soit $f \in \mathcal{C}^1(U, \mathbb{R})$ où U est un ouvert de E, E étant un espace vectoriel euclidien. Soit $a \in U$.
L'unique vecteur u_a tel que $df(a) = (u_a \mid .)$ s'appelle le vecteur gradient de f au point a et est noté $\overrightarrow{grad} f(a)$.

$$\forall x \in E, df(a)(x) = \left(\overrightarrow{grad} f(a) \mid x\right)$$

Dans E euclidien muni d'une base $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ orthonormée :

$$\overrightarrow{grad} f(a) = \sum_{i=1}^{n} D_i f(a) \cdot e_i \text{ i.e. } \overrightarrow{grad} f(a) = (D_1 f(a), \ldots, D_n f(a))_{\mathcal{B}}$$

Dans $\mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire usuel, dans la base canonique :

$$\overrightarrow{grad} f(a) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} \cdot e_i \text{ i.e. } \overrightarrow{grad} f(a) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}(a), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(a)\right)$$

$$\mathcal{J}_{\mathcal{C}}(f)(a) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(a)\right) \in \mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{R})$$

$$df(a) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) dx_i$$

Application au coordonnées cartésiennes - polaires : Soit $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x, y) & \mapsto & f(x, y) \end{array}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.
Pour ρ et $\theta \in \mathbb{R}$, on pose $F(\rho, \theta) = f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)$. F est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ avec $\forall \rho, \theta \in \mathbb{R}$:

- $\dfrac{\partial F}{\partial \rho}(\rho, \theta) = \cos\theta \dfrac{\partial f}{\partial x}(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta) + \sin\theta \dfrac{\partial f}{\partial y}(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)$
- $\dfrac{\partial F}{\partial \theta}(\rho, \theta) = -\rho\sin\theta \dfrac{\partial f}{\partial x}(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta) + \rho\cos\theta \dfrac{\partial f}{\partial y}(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)$

Lemme : Soit U un ouvert convexe de E espace vectoriel normé. Soit $f \in \mathcal{C}^1(U,\mathbb{R})$. Soient $a, b \in U$. Alors :

$$f(b) - f(a) = \int_0^1 df\big((1-t)a + tb\big)(b-a)dt$$

Théorème 1 : Soit $f \in \mathcal{C}^1(U,\mathbb{R})$ où U est un ouvert convexe de E, E étant un espace vectoriel normé de dimension finie. Alors :

$$\forall a, b \in U,\ |f(a) - f(b)| \leqslant \|b-a\| \times \underset{x\in[a,b]}{\mathrm{Max}}\big(|||df(a)|||\big)$$

Théorème 2 : Soit $f \in \mathcal{C}^1(U,\mathbb{R})$ où U est un ouvert convexe de E, E étant un espace vectoriel euclidien. Alors :

$$\forall a, b \in U,\ |f(b) - f(a)| \leqslant \|b-a\| \times \underset{x\in[a,b]}{\mathrm{Max}}\left(\left\|\overrightarrow{grad}(f)(x)\right\|\right)$$

Corollaire : Soit $f \in \mathcal{C}^1(U,\mathbb{R})$ où U est un ouvert de E.

$$f \text{ constante } \Leftrightarrow df = 0$$

Définition : extremum : Soit $f : U \to \mathbb{R}$ avec E un espace vectoriel normé et U ouvert de E.
On dit que f admet un maximum (resp. un minimum) local en $a \in U$ s'il existe $r > 0$ / $\forall x \in \mathcal{B}(a,r),\ f(x) \leqslant f(a)$ (resp.$f(x) \geqslant f(a)$).

Définition : Soient $f \in \mathcal{C}^1(U,\mathbb{R})$ et $a \in U$. On dit parfois que f présente en a un point critique (ou extremum potentiel) si :

$$df(a) = 0$$

Théorème : Soit $f \in \mathcal{C}^1(U,\mathbb{R})$ avec U un ouvert de E. Soit $a \in E$.
Si f présente en a un extremum local, nécessairement $df(a) = 0$.

Conséquence : Si $f \in \mathcal{C}^1(\Delta,\mathbb{R})$, avec Δ non nécessairement ouvert, les extremums de f sont :

- soit des points de la frontière ;
- soit des points de $\mathring{\Delta}$ pour lesquels toutes dérivées partielles sont nulles.

Théorème : Soit $f \in \mathcal{C}^2(U,\mathbb{R})$ où U est un ouvert de $\mathbb{R}^2$. Soit $(x_0,y_0) \in U$. Soit $(h,k) \in \mathbb{R}^2$ / $(x_0+h, y_0+k) \in U$. Alors :

$$\begin{aligned} f(x_0+h, y_0+k) = \ & f(x_0,y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\cdot h + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\cdot k \\ & + \frac{1}{2!}\cdot\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0)\cdot h^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0,y_0)\cdot h\cdot k + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0,y_0)\cdot k^2\right) + o\left(\|(h,k)\|^2\right) \end{aligned}$$

Théorème : Soit $f \in \mathcal{C}^2(U, \mathbb{R})$ où U est un ouvert de $\mathbb{R}^2$. Soit $(x_0, y_0) \in U$ tel que $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0$. Soit :

$$r = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) \qquad s = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) \qquad t = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0)$$

1. Si $r \cdot t - s^2 > 0$, f présente un extremum en (x_0, y_0) :
   - si $r > 0$, c'est un minimum ;
   - si $r < 0$, c'est un maximum ;
2. Si $r \cdot t - s^2 > 0$, f ne présente pas en (x_0, y_0) un extremum mais présente un point selle.

Équation aux dérivées partielles On cherche à résoudre des équations aux dérivées partielles i.e. chercher les fonctions $f \in \mathcal{C}^1(U, \mathbb{R})$ où U est un ouvert de $\mathbb{R}^2$, qui vérifie une équation (E) comportant $f, \dfrac{\partial f}{\partial x}, \dfrac{\partial f}{\partial y}$.