Chapitre 18 : Équations différentielles linéaires

13/3/2012

1 Rappels de 1re année

Résolution d'une équation différentielle linéaire de la forme de (E)

$$(E) : y' = a(x) \cdot y + b(x),\ a, b \in \mathcal{C}(I, \mathbb{R})$$

L'ensemble solution de l'équation homogène associée :

$$\mathcal{S}^\star = \left\{ Y : \begin{array}{l} I \to \mathbb{R} \\ x \mapsto C \cdot e^{A(x)} \end{array} c \in \mathbb{R}, A \text{ une primitive de a} \right\}$$

Cas général :

$$\mathcal{S} = \left\{ y : \begin{array}{l} I \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \tilde{y}(x) + C \cdot e^{A(x)} \end{array} C \in \mathbb{R}, A \text{ une primitive de a},\ \tilde{y} \text{ est une solution particulière} \right\}$$

Problème de Cauchy : un théorème dit de Cauchy énonce l'existence d'une et une seule solution au problème suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} y' = a(x) \cdot y + b(x),\ a, b \in \mathcal{C}(I, \mathbb{R}) \\ y(x_0) = y_0 \end{array} \right. ,\ x_0 \in I,\ y_0 \in \mathbb{R}$$

Résolution d'une équation différentielle linéaire de la forme de (E')

$$(E) : a(x) \cdot y' = b(x) \cdot y + c(x),\ a, b, c \in \mathcal{C}(I, \mathbb{R})$$

On se ramène au premier cas en divisant par $a(x)$ mais il y a un problème si a s'annule. On résout alors (E') sur chacun des intervalles où a ne s'annule pas.
On essaie ensuite de raccorder aux points x_0 où a s'annule.
Aux points à problème, il doit y avoir continuité de la fonction solution, elle doit y être dérivable et une fois ces conditions vérifiées, on s'assure que (E') reste vraie pour $x = 0$.

2 Équations différentielles linéaires d'ordre 1

Notation

- $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$;
- F désigne un espace vectoriel normé de dimension finie (pratiquement, $F = \mathbb{R}, \mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$) ;
- Dans $\mathcal{L}(F)$, si $u \in \mathcal{L}(F)$ et $x \in F$, on note $u.x$ plutôt que $u(x)$.
  Comme $\begin{array}{l} \mathcal{L}(E) \times F \\ (u, x) \mapsto u.x \end{array}$ est bilinéaire, si $a \in \mathcal{D}(I, \mathcal{L}(F))$ et si $\varphi \in \mathcal{D}(I, F)$, en notant $a.\varphi : \left\{ \begin{array}{l} I \to F \\ t \mapsto a(t).\varphi(t) \end{array} \right.$, alors $a.\varphi \in \mathcal{D}(I, F)$ et $(a.\varphi)' = a'.\varphi + a.\varphi'$.

Définition 1 : équation différentielle linéaire du premier ordre : On appelle équation différentielle linéaire du premier ordre toute équation du type :

$$(E) : x' = a.x + b$$

où $a \in \mathcal{C}\big(I, \mathcal{L}(F)\big)$ et $b \in \mathcal{C}(I, F)$.

Définition 2 : solution de l'équation différentielle linéaire : Une solution de l'équation différentielle linéaire (E) est une fonction $\varphi \in \mathcal{D}(I, F)$ telle que :

$$\forall t \in I,\ \varphi'(t) = a(t).\varphi(t) + b(t)$$

Définition 3 : problème de Cauchy : On appelle problème de Cauchy tout problème du type :

$$\begin{cases} x' = a.x + b\ (E) \\ x(t_0) = y_0\ (C.I.) \end{cases}$$

où $a \in \mathcal{C}\big(I, \mathcal{L}(F)\big),\ b \in \mathcal{C}(I, F),\ t_0 \in I$ et $x_0 \in F$.

Propriété : Si φ est solution de $(E) : x' = a(t).x + b(t)$ (où a et b sont continues sur I), alors $\varphi \in \mathcal{C}^1(I, F)$. Ainsi, toute solution d'une équation différentielle linéaire du premier ordre est de classe $\mathcal{C}^1$.
Prolongement : si a et b sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ alors φ sera de classe $\mathcal{C}^\infty$.

Propriétés algébriques : Notons $\mathcal{S}$ l'ensemble solution de (E) une équation différentielle linéaire du premier ordre et $\mathcal{S}^\star$ l'ensemble solution de l'équation différentielle homogène associée. $\mathcal{S} = \tilde{x} + \mathcal{S}^\star$ est un espace affine de même dimension que $\mathcal{S}^\star$ avec $\tilde{x}$ une solution particulière de (E).

Proposition : principe de superposition : Soient $(E_1) : x' = a.x + b_1,\ (E_2) : x' = a.x + b_2$ et $(E) : x' = a.x + b1 + b_2$ et $\mathcal{S}_1,\ \mathcal{S}_2$ et $\mathcal{S}$ les ensembles solutions associés.
Si $x_1 \in \mathcal{S}_1$ et $x_2 \in \mathcal{S}_2$, alors :

$$\forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2,\ \alpha \cdot x_1 + \beta \cdot x_2 \in \tilde{\mathcal{S}} \text{ où } (\tilde{E}) : x' = a.x + (\alpha \cdot b1 + \beta \cdot b_2)$$

Théorème : théorème de Cauchy-Lipschitz : Soit $(E) : x' = a(t).x + b(t)$ où $a \in \mathcal{C}\big(I, \mathcal{L}(F)\big),\ b \in \mathcal{C}(I, F)$ avec F un espace vectoriel normé de dimension finie. Le problème de Cauchy :

$$\begin{cases} (E) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \quad \text{où } t_0 \in I,\ x_0 \in F$$

admet une et une seule solution.

Théorème : Les solutions de l'équation différentielle linéaire homogène $(E^\star) : x' = a(t).x$ où $a \in \mathcal{C}\big(I, \mathcal{L}(F)\big)$ constituent un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de même dimension que F i.e. $\dim \mathcal{S}^\star = \dim F$.

Définition : système fondamental de solutions : On appelle système fondamental de solutions de $(E^\star)$ toute base $(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ où $n = \dim F$ constituées de solution de $(E^\star) : y' = a(x).y$.

Définition : wronskien : Soient $(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ une famille de fonction de I à valeurs dans F un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n de base $\mathcal{B}$. On appelle wronskien de $(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ l'application :

$$W_{\mathcal{B}} : \begin{array}{rcl} I & \to & \mathbb{K} \\ t & \mapsto & \det_{\mathcal{B}}(\varphi_1(t), \ldots, \varphi_n(t)) \end{array}$$

Proposition fondamentale : Soit $(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ n éléments de $\mathcal{S}^\star$ espace solution de $(E^\star)$: $x' = a(t).x$ où $a \in \mathcal{C}\big(I, \mathcal{L}(F)\big)$. Les trois affirmations suivantes sont équivalentes :

1. $(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ est un système fondamental de solutions de $\mathcal{S}^\star$;
2. $\exists t_0 \in I \ / \ W(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)(t_0) \neq 0$;
3. $\forall t \in I, \ W(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)(t) \neq 0$.

Lemme : Soit $(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ un système fondamental de solutions de $(E^\star)$: $x' = a(t).x$. Soit $\varphi \in \mathcal{C}(I, F)$, $n = \dim F$. Alors :

$$\exists \, (\lambda_i)_{i \in [\![1,n]\!]} \in \mathcal{C}(I, \mathbb{K}) \ / \ \varphi = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \varphi_i$$

Et de plus, si $\varphi \in \mathcal{C}^1(I, F)$, alors $\forall i \in [\![1, n]\!], \ \lambda_i \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{K})$.

Théorème : Soit $(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ un système fondamental de solutions de $(E^\star)$: $x' = a(t).x$ avec $a \in \mathcal{C}\big(I, \mathcal{L}(F)\big)$. Soit (E) : $x' = a(t).x + b(t)$ où $b \in \mathcal{C}(I, F)$. Soient $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathcal{C}(I, F) \ / \ b = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \varphi_i$. Soit $\varphi \in \mathcal{C}^1(I, F)$ et soient $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathcal{C}^1(I, F) \ / \ \varphi = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \varphi_i$.

$$\varphi \text{ est solution de } (E) \Leftrightarrow \forall i \in [\![1, n]\!], \ \lambda_i' = \alpha_i$$

3 Équations différentielles linéaires à coefficients constants

Plus précisement, dans (E) : $x' = a(t).x + b(t)$, a est constante.

Proposition : problème de Cauchy : La seule solution du problème de Cauchy

$$\left\{ \begin{array}{l} x' = a.x \\ x(t_0) = v \end{array} \right. \quad \text{où } a \in \mathcal{L}(F), \ t_0 \in I, \ v \in F$$

est l'application $t \mapsto \exp\big((t - t_0) \cdot a\big).v$.

Théorème : Soit $(E^\star)$: $x' = a.x$ où $a \in \mathcal{L}(F)$. Soit $(v_1, \ldots, v_n)$ une famille de n vecteurs de F. Soit $\varphi_i : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & F \\ t & \mapsto & \exp(t \cdot a).v \end{array}$

Propriétés : exp **:**

- Si $(\mathcal{A}, +, \times, \cdot)$ est une algèbre, $\forall u \in \mathcal{A}, \ \exp u = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{u^n}{n!}$;
- Si a et b deux éléments de $\mathcal{A}$ commutent, $\exp(a + b) = \exp(a) \times \exp(b)$;
- $\exp(0_{\mathcal{A}} = 1_{\mathcal{A}}$;
- $\forall a \in \mathcal{L}(F), \ \forall (t, s) \in I^2, \ \exp\big((t + s) \cdot a\big) = \exp(t \cdot a) \circ \exp(s \cdot a)$;

- $\exp\left(0_{\mathcal{L}(F)}\right) = Id_F$;
- $\forall a \in \mathcal{L}(F),\ \forall t \in I,\ \exp(t \cdot a) \in GL(F)$;
- $\forall a \in \mathcal{L}(F),\ \forall a \in I,\ a$ et $\exp(t \cdot a)$ commutent.

Proposition : exponentielle de matrice :
- Si $\Delta = \text{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n),\ \exp(\Delta) = \text{diag}(e^{\lambda_1}, \ldots, e^{\lambda_n})$;
- Si A est diagonalisable, $\exists P \in GL_n(\mathbb{R})\ /\ A = P \cdot \Delta \cdot P^{-1}$ avec Δ diagonale. Alors $\exp(A) = P \cdot \exp(\Delta) \cdot P^{-1}$
- Si A est nilpotente d'indice p, $\exp(t \cdot a) = \displaystyle\sum_{n=0}^{p-1} \frac{(t \cdot A)^n}{n!}$

4 Systèmes différentiels linéaires

On résout ici $X' = A \cdot X + B(t)$ où $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}),\ B \in \mathcal{C}(I, \mathbb{K}^n)$.

Cas où A est diagonalisable : Notons λ_j les valeurs propres de A et v_j leurs vecteurs propres associés.

$$\varphi(t) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \cdot e^{\lambda_j \cdot t} \cdot v_j$$

φ est une solution de $(E^\star)$ avec $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{K}^n$.

Cas où A est triangulaire : On a un système de la forme $\left\{\begin{array}{ccccccc} x' & = & x & + & y & + & z \\ y' & = & & & y & + & z \\ z' & = & & & & & z \end{array}\right.$ que l'on résout à l'aide de la méthode du pivot de Gauss.

Cas où Card$\big(Sp(A)\big) = 1$ et A non diagonalisable : On cherche une matrice N dépendant de A tel que N est nilpotente. Il faut ensuite calculer $\exp(t \cdot A)$. Les solutions de $(E^\star)$ s'écrivent : $t \mapsto \exp(t \cdot A) \cdot v$ où $v = (\alpha, \beta, \gamma)$ quelconque.

5 Équations différentielles linéaires (scalaires) d'ordre 2

Définition 1 : Une équation différentielle linéaire d'ordre 2 est une équation du type :

$$(E) : a(t) \cdot x'' + b(t) \cdot x' + c(t) \cdot x = d(t)$$

où $a, b, c, d \in \mathcal{C}(I, \mathbb{K})$.

Définition 2 : Une solution de (E) est une fonction φ deux fois dérivable de I dans $\mathbb{K}$ telle que :

$$\forall t \in I,\ a(t) \cdot \varphi''(t) + b(t) \cdot \varphi'(t) + c(t) \cdot \varphi(t) = d(t)$$

Définition 3 : On appelle problème de Cauchy tout problème du type :

$$\left\{\begin{array}{l} (E) \\ x(t_0) = x_0,\ x'(t_0) = v_0 \end{array}\right. \quad \text{où} \ \ t_0 \in I,\ x_0, v_0 \in \mathbb{K}$$

Proposition : Soit $(E) : a(t)\cdot x'' + b(t)\cdot x' + c(t)\cdot x = d(t)$ avec $a,b,c,d \in \mathcal{C}(I,\mathbb{K})$. Soit $(E^\star) : (E) : a(t)\cdot x'' + b(t)\cdot x' + c(t)\cdot x = 0$ l'équation homogène associée. Soient $\mathcal{S}$ et $\mathcal{S}^\star$ les espaces solutions respectifs de (E) et $(E\star)$. Alors :

- $\mathcal{S}^\star$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel ;
- $\mathcal{S}$ est ou bien vide ou bien un $\mathbb{K}$-espace affine i.e. $\exists \tilde{x} \in \mathcal{S}^\star \ / \ \mathcal{S} = \tilde{x} + \mathbb{S}^\star$.

Propriété : Si a ne s'annule pas sur I, toute solution de (E) est nécessairement ce classe $\mathcal{C}^2$ sur I.

Théorème : Le problème de Cauchy :

$$\begin{cases} x'' + \dfrac{b(t)}{a(t)}\cdot x' + \dfrac{c(t)}{a(t)}\cdot x = \dfrac{d(t)}{a(t)} \\ x(t_0) = x_0,\ x'(t_0) = v_0 \end{cases} \quad \text{où} \quad t_0 \in I,\ x_0, v_0 \in \mathbb{K}$$

admet une et une seule solution.

Proposition : $\Psi_{t_0} : \begin{array}{ccc} \mathcal{S}^\star & \to & \mathbb{K}^2 \\ x & \mapsto & \big(x(t_0), x'(t_0)\big) \end{array}$ est un isomorphisme.

Théorème :

$$\dim \mathcal{S}^\star = 2$$

Définition 4 : On appelle système fondamental de solutions toute base (φ_1, φ_2) de $\mathcal{S}^\star$.

Définition : wronskien : Soit $(E^\star) : a(t)\cdot x'' + b(t)\cdot x' + c(t)\cdot x = 0$ où $a,b,c,d \in \mathcal{C}(I,\mathbb{K})$. Soit φ_1, φ_2 deux solutions de $(E^\star)$. On appelle wronskien de (φ_1, φ_2) l'application :

$$W(\varphi_1,\varphi_2) : \begin{cases} I & \to & \mathbb{K} \\ t & \mapsto & \begin{vmatrix} \varphi_1(t) & \varphi_2(t) \\ \varphi_1'(t) & \varphi_2'(t) \end{vmatrix} \end{cases}$$

Théorème : Soit $(E^\star) : a(t)\cdot x'' + b(t)\cdot x' + c(t)\cdot x = 0$ où $a,b,c,d \in \mathcal{C}(I,\mathbb{K})$, a ne s'annulant pas sur I. Alors les trois affirmations suivantes sont équivalentes pour deux solutions φ_1, φ_2 de $(E^\star)$:

1. (φ_1, φ_2) est un système fondamental de solutions ;
2. $\exists t_0 \in I \ / \ W(\varphi_1,\varphi_2)(t_0) \neq 0$;
3. $\forall t \in I,\ W(\varphi_1,\varphi_2) \neq 0$.

Recherche de solutions :

- recherche de solutions particulières de la même forme que a, b et c ;
- recherche de solutions développables en série entière ;
- recherche par méthode de variation de la constante ;
- recherche par méthode de variation des constantes.

Méthode de variation de la constante : Une fois une première solution φ de $(E^\star)$ trouvé, on pose $x(t) = \varphi(t)\cdot z(t)$. On doit supposer que φ ne s'annule pas pour pouvoir écrire réciproquement $z = \dfrac{x}{\varphi}$. Il faut ensuite reporter dans (E). On trouve une équation différentielle du premier ordre en z' que l'on résout en posant $Z = z'$. Ainsi, $x = C\cdot\varphi \displaystyle\int \psi_1 + D\cdot\varphi$ avec $C, D \in \mathbb{K}$ et $Z = C\cdot\psi_1$.

Méthode de variation des deux constantes : On cherche un système fondamental de solutions de $(E^\star)$ notées (φ_1, φ_2). On cherche alors une solution particulière $\tilde{x}$ de (E) sous la forme $\tilde{x} = \lambda_1 \cdot \varphi_1 + \lambda_2 \cdot \varphi_2$ où les dérivées de λ_1 et λ_2 vérifient le système : $\begin{cases} \lambda_1' \cdot \varphi_1 + \lambda_2' \cdot \varphi_2 = 0 \\ \lambda_1' \cdot \varphi_1' + \lambda_2' \cdot \varphi_2' = \dfrac{d(t)}{a(t)} \end{cases}$.
On obtient λ_1' et λ_2' par résolution du système de Cramer puis λ_1 et λ_2 par recherche de primitive. On a donc l'expression de $\tilde{x} = \lambda_1 \cdot \varphi_1 + \lambda_2 \cdot \varphi_2$. D'où :

$$\mathcal{S}_{\mathcal{E}} = \left\{ \begin{array}{ccc} I & \to & \mathbb{K} \\ t & \mapsto & \tilde{x}(t) + \alpha_1 \cdot \varphi_1 + \alpha_2 \cdot \varphi_2 \end{array} , \ (\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{K}^2 \right\}$$