Chapitre 19 : courbes et surfaces

27/3/2012

---

1 Courbe paramétrée

Vocabulaire :

- on appelle arc paramétré de classe $\mathcal{C}^1$ du plan toute fonction $\overrightarrow{f} : I \to \mathbb{R}^2$ où I est un intervalle de $\mathbb{R}$ et $\overrightarrow{f} \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R}^2)$. On parle souvent de l'arc $\Gamma = \left(I, \overrightarrow{f}\right)$;
- on appelle support de l'arc l'image de I par $\overrightarrow{f}$.
- notation : $\overrightarrow{f}(t) = \overrightarrow{OM}(t)$. Selon le contexte, $\big(x(t), y(t)\big)$ représente le point $M(t)$ ou le vecteur $\overrightarrow{OM}(t)$.
- on appelle arc simple tout arc paramétré dont $\overrightarrow{f}$ est injective ;
- on appelle arc simple fermé tout arc paramétré tel que : $I = [a, b]$, $\overrightarrow{f}(a) = \overrightarrow{f}(b)$ et $f_{|]a,b[}$ est injective ;
- paramétrage admissible : soit (I, f) et (J, g) deux arcs paramétrées. On dit que (J, g) est un paramétrage admissible de classe $\mathcal{C}^k$ de (I, f) s'il existe un $\mathcal{C}^k$-difféomorphisme φ de I sur J tel que $f = g \circ \varphi$. Une telle application φ est appelée un changement de paramétrage de classe $\mathcal{C}^k$. Les deux arcs ont le même support ;
- on appelle point régulier tout point $M = \overrightarrow{f}(t)$ tel que $\overrightarrow{f'}(t) \neq \overrightarrow{0}$;
- on appelle point singulier ou stationnaire tout point $M = \overrightarrow{f}(t)$ tel que $\overrightarrow{f'}(t) = \overrightarrow{0}$;
- on appelle arc régulier tout arc dont tout point est régulier ;
- interprétation cinématique : $\overrightarrow{f'}(t)$ désigne le vecteur vitesse au point $M(t)$, $\overrightarrow{f''}(t)$ désigne le vecteur accélération au point $M(t)$.

Tangente :

- en point régulier : si $M(t_0)$ est tel que $\overrightarrow{f'}(t_0) \neq \overrightarrow{0}$, alors $\overrightarrow{f'}(t_0)$ dirige la tangente ;
- en un point singulier : la tangente au point $M_0 = \overrightarrow{f}(t_0)$ est dirigée par $\overrightarrow{f^{(p)}}(t_0)$ où $p = \text{Min}\left\{q \in \mathbb{N}^\star \ / \ \overrightarrow{f^{q)}}(t_0) \neq 0\right\}$.

Branches infinies : Soit $\Gamma = \begin{cases} x = X(t) \\ y = Y(t) \end{cases}$. Il y a branche infinie au voisinage de t_0 si : $X(t) \underset{t \to t_0}{\to} \pm\infty$ ou $Y(t) \underset{t \to t_0}{\to} \pm\infty$.

1. $X(t) \underset{t \to t_0}{\to} \pm\infty$ et $Y(t) \underset{t \to t_0}{\to} b$, $b \in \mathbb{R}$: asymptote d'équation $y = b$;
2. $X(t) \underset{t \to t_0}{\to} a$, $a \in \mathbb{R}$ et $Y(t) \underset{t \to t_0}{\to} \pm\infty$: asymptote d'équation $x = a$;
3. $X(t) \underset{t \to t_0}{\to} \pm\infty$ et $Y(t) \underset{t \to t_0}{\to} \pm\infty$: calculer $a = \lim\limits_{t \to t_0} \dfrac{Y(t)}{X(t)}$:
   (a) $a = \pm\infty$: branche parabolique de direction asymptotique l'axe $(y'y)$;
   (b) $a = 0$: branche parabolique de direction asymptotique l'axe $(x'x)$;

(c) $a \in \mathbb{R}$: calculer $b = \lim_{t \to t_0} Y(t) - a \cdot X(t)$:

i. $b = \pm\infty$: branche parabolique de direction asymptotique la droite $\Delta : y = a \cdot x$;

ii. $b \in \mathbb{R}$: branche parabolique de direction asymptotique la droite $\Delta : y = a \cdot x + b$.

Courbes polaires : On étudie des courbes d'équations polaires $r = f(\theta)$:

$$\mathcal{C} = \left\{ M \in \mathcal{P} \ / \ \exists (r, \theta) \in \mathbb{R}^2 : r = f(\theta) \text{ et } (r, \theta) \text{ est un couple de coordonnées polaires de } M \right\}$$

$$\overrightarrow{f'}(\theta) = f'(\theta) \overrightarrow{e_r}(\theta) + f(\theta) \overrightarrow{e_\theta}(\theta)$$

Tangente :

- si $M \neq (0,0)$ et si $f'(\theta) = 0$, la tangente est orthogonale au rayon vecteur $\overrightarrow{OM}(\theta)$;
- si $M = (0,0)$ i.e. s'il existe $\theta_0 \ / \ M(\theta_0) = (0,0)$, la tangente en $(0,0)$ a pour angle polaire θ_0.

Plan d'étude d'une courbe polaire :

1. domaine de définition ;
2. analyse des propriétés permettant de reduire le domaine d'étude ;
3. calculer $f'(\theta)$, en étudier le signe et faire un tableau de variations ;
4. relever les points particuliers ;
5. étude des branches infinies si $\exists \theta_0 \in \overline{\mathbb{R}} \ / \ \lim_{\theta \to \theta_0} f(\theta) = \pm\infty$ en paramétrant la courbe ;
6. tracer la courbe.

Quelques courbes d'équations polaires connues :

- cercle passant par $(0,0)$, de centre $\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2} \right)$ et de rayon $\frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2}$:

$$\rho(\theta) = a \cdot \cos\theta + b \cdot \sin\theta$$

- droite ne passant pas par $(0,0)$ d'équation cartésienne $ax + by = 1$:

$$\rho(\theta) = \frac{1}{a \cdot \cos\theta + b \cdot \sin\theta}$$

- conique de paramètre p, d'excentricité e dans le repère orthonormé $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ qui sont les axes de la coniques :

$$\rho(\theta) = \frac{p}{1 + e \cdot \cos\theta}$$

2 Théorème de relèvement

Théorème : théorème de relèvement : Soif $f \in \mathcal{C}^1(I, U)$ où I est un intervalle de $\mathbb{R}$ et U le cercle trignométrique de $\mathbb{R}^2$. À f est donc associé un arc paramétré dont le support est inclus dans U. Alors :

$$\exists \theta \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R}) \ / \ \forall t \in I, \ f(t) = e^{i\theta(t)}$$

et θ est unique à une constante $2k\pi$ près.

3 Étude métrique d'un arc orienté

On travaille ici dans E un espace vectoriel euclidien Pratiquement, on se place dans $\mathbb{R}^2$ muni du produit scalaire usuel.

Définition : abscisse curviligne : Soit $\Gamma = (I, \overrightarrow{f})$ un arc paramétrique régulier de classe $\mathcal{C}^1$. On appelle abscisse curviligne toute fonction $S \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R})$ telle que :

$$\forall t \in I,\ S'(t) = \left\| \overrightarrow{f'}(t) \right\|$$

De telles fonctions existent et sont uniques à une constante près :

$$S : t \mapsto \int_{t_0}^{t} \left\| \overrightarrow{f'}(u) \right\| du$$

Principe :

1. poser $s = S(t) = \displaystyle\int_{t_0}^{t} \left\| \overrightarrow{f'}(u) \right\| du$ en ayant choisit t_0 pour que $M(t_0)$ soit l'origine ($s = 0$) pour l'abscisse curviligne ;
2. calculer S^{-1} ;
3. poser $\overrightarrow{g} = \overrightarrow{f} \circ S^{-1}$.

Définition : Une paramétrisation $\Gamma = (J, \overrightarrow{g})$ est dite normale si :

$$\forall s \in J,\ \left\| \overrightarrow{g'}(s) \right\| = 1$$

Propriété : Si on utilise une abscisse curviligne $s = S(t)$ pour reparamétrer un arc $\Gamma = (I, \overrightarrow{f})$, la paramétrisation obtenue est une paramétrisation normale.

Définition : longueur d'un arc :

- dans le cas d'une paramétrisation normale : soit $\Gamma = (J, \overrightarrow{g})$ un arc dont la paramétrisation est normale et où $J = [\alpha, \beta]$:
$$l(\Gamma) = (\beta - \alpha)$$
- dans le cas d'un arc paramétrique régulier : soit $\Gamma = (I, \overrightarrow{f})$ de classe $\mathcal{C}^1$ régulier avec $I = [a, b]$:
$$l(\Gamma) = \int_a^b \left\| \overrightarrow{f'}(t) \right\| dt$$

Applications :

- pour une courbe d'équation cartésienne ($x \in [a, b]$) d'équation $y = f(x)$:
$$l(\mathcal{C}) = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$$
- pour une courbe d'équation polaire $r = \rho(\theta)$ avec $\theta \in [\theta_0, \theta_1]$:
$$l(\mathcal{C}) = \int_{\theta_0}^{\theta_1} \sqrt{(\rho'(\theta))^2 + (\rho(\theta))^2} d\theta$$

Définition 1 : repère de Frénet : On appelle repère de Frénet de l'arc $\Gamma = (I, \overrightarrow{f})$ au point M le repère $\left(M, \overrightarrow{T}, \overrightarrow{N}\right)$ où :

$$\overrightarrow{T} = \frac{\overrightarrow{f'}(t)}{\left\|\overrightarrow{f'}(t)\right\|} = \overrightarrow{g'}(s) \qquad \overrightarrow{N} = r_{\frac{\pi}{2}}\left(\overrightarrow{T}\right)$$

Définition 2 : courbure : $\exists \alpha : J \to \mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{g'}(s) = \begin{pmatrix} \cos\alpha(x) \\ \sin\alpha(s) \end{pmatrix}$. α' s'appelle la fonction courbure. $\alpha'(s)$ est la courbure au point $M(s)$ de l'arc $\Gamma' = (J, \overrightarrow{g})$ paramétré normalement.

Proposition : Au point $M(t)$, la courbure est égale à :

$$\frac{\det\left(\overrightarrow{f'}(t), \overrightarrow{f''}(t)\right)}{\left\|\overrightarrow{f'}(t)\right\|^3}$$

Application :

- pour une courbe d'équation cartésienne $y = f(x)$, la courbure γ est :

$$\gamma(x) = \frac{f''(x)}{\left(1 + f'(x)\right)^{\frac{3}{2}}}$$

- pour une courbe polaire d'équation $r = \rho(\theta)$, la courbure γ est :

$$\gamma(\theta) = \frac{2\rho'(\theta)^2 + \rho(\theta)^2 - \rho(\theta)\cdot\rho''(\theta)}{\left(\rho'(\theta) + \rho(\theta)^2\right)^{\frac{3}{2}}}$$

4 Théorème des fonctions implicites

Théorème : théorème des fonctions implicites : Soit $f \in \mathcal{C}^1(U, \mathbb{R})$ où U est un ouvert de $\mathbb{R}^2$. Soit $\mathcal{C}$ la courbe d'équation implicite $f(x, y) = 0$. Soit $M_0 = (x_0, y_0) \in \mathcal{C}$ tel que $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$. Alors il existe : deux intervalles I, J de $\mathbb{R}$ tels que $I \times J \subset U$ et une fonction $\varphi \in \mathcal{C}^1(I, J)$ tel que :

$$\forall (x, y) \in I \times J,\ f(x, y) = 0 \Leftrightarrow y = \varphi(x) \text{ avec } \varphi(x_0) = y_0$$

Et alors :

$$\varphi'(x) = \frac{-\frac{\partial f}{\partial x}\big(x, \varphi(x)\big)}{\frac{\partial f}{\partial y}\big(x, \varphi(x)\big)}$$

Théorème : Soit $\mathcal{C}$ une courbe d'équation implicite $f(x, y) = 0$ où $f \in \mathcal{C}^1(U, \mathbb{R})$. Soit $M_0 = (x_0, y_0) \in \mathcal{C}$ tel que $\overrightarrow{grad} f(M_0) \neq \overrightarrow{0}$. Alors :

- le point M_0 est dit « régulier »(définition particulière poir les courbes définies implicitement) ;
- la tangente en M_0 est orthogonale à $\overrightarrow{grad} f(M_0)$ et a donc comme équation :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\cdot(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\cdot(y - y_0)$$

Application aux coniques :

- tangente à une ellipse $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ en un point (x_0, y_0) :

$$\mathcal{T} : \frac{xx_0}{a2} + \frac{yy_0}{b^2} = 1$$

- tangente à une hyperbole $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ en un point (x_0, y_0) :

$$\mathcal{T} : \frac{xx_0}{a2} - \frac{yy_0}{b^2} = 1$$

- tangente à une parabole $y2 = 2px$ en un point (x_0, y_0) :

$$\mathcal{T} : yy_0 = p(x + x_0)$$

5 Intégrale curviligne, circulation

Hypothèses : U est un ouvert de $\mathbb{R}^2$, $f, P, Q \in \mathcal{C}^1(U, \mathbb{R}^2)$, $P_i \in \mathcal{C}^1(U, \mathbb{R}^n)$.

Définition - écriture : formes différentielles et champ de vecteur :

- Forme différentielle de classe $\mathcal{C}^1$ sur U :

  Définition 1 :

$$\omega : U \xrightarrow{\mathcal{C}^1} \mathcal{L}(E, \mathbb{R}) = E^\star$$

  Écriture locale :

$$\forall (x, y) \in U,\ \omega(x, y) = P(x, y)e_1^\star + Q(x, y)e_2^\star \qquad \omega(x, y) = P(x, y)dx + Q(x, y)dy$$

  Écriture globale :

$$\omega = Pdx + Qdy$$

  Particularité :

$$\forall (x, y) \in U,\ \forall (h, k) \in \mathbb{R}^2,\ \omega(x, y)(h, k) = P(x, y)h + Q(x, y)k$$

  Définition 2 : ω est une forme différentielle exacte si :

$$\exists f \in \mathcal{C}^1(U, \mathbb{R}) \ / \ \omega = df$$

  Définition 3 : f est alors une primitive de ω.

  Définition 4 : ω est une forme différentielle fermée si :

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$$

  Définition 4' : Plus généralement, $\omega = \sum P_i dx_i$ est fermée si :

$$\forall i, j,\ \frac{\partial P_i}{\partial x_j} = \frac{\partial P_j}{\partial x_i}$$

- Champ de vecteur défini sur U :

Définition 1 :

$$V : U \xrightarrow{\mathcal{C}^1} E$$

Écriture locale :

$$\forall (x,y) \in U,\ V(x,y) = \big(P(x,y), Q(x,y)\big) \qquad V(x,y) = P(x,y)e_1 + Q(x,y)e_2$$

Écriture globale :

$$V = (P,Q)$$

Particularité : en euclidien seulement avec une base orthonormée :

$$\forall (x,y) \in U,\ \forall (h,k) \in \mathbb{R}^2,\ \big(V(x,y) \mid (h,k)\big) = P(x,y)h + Q(x,y)k$$

Définition 2 : V est champ de gradients si :

$$\exists f \in \mathcal{C}^1(U,\mathbb{R}) \ / \ V = \overrightarrow{grad} f$$

Définition 3 : f est alors un potentiel scalaire de V. On dit que V dérive du potentiel scalaire f.

Définition 5 : Si $V = (P,Q,R)$ est un champ de vecteurs de $\mathbb{R}^3$:

$$\overrightarrow{rot} V = \left(\frac{\partial \cdot}{\partial x}, \frac{\partial \cdot}{\partial y}, \frac{\partial \cdot}{\partial z}\right) \wedge (P,Q,R)$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$$

Équivalence : $\omega = Pdx + Qdy + Rdz$ est fermée si et seulement si

$$\overrightarrow{rot} V = \overrightarrow{0}$$

Définition : intégrale curviligne (circulation) : Soit ω une forme différentielle de classe $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert U de $\mathbb{R}^2$ ($\omega = Pdx+Qdy$) ou encore soit $\overrightarrow{V} \in \mathcal{C}^1(U,\mathbb{R}^2)$ où $\forall (x,y) \in U,\ \overrightarrow{V}(x,y) = \big(P(x,y), Q(x,y)\big)$ i.e. soit $\overrightarrow{V}$ un champ de vecteurs de classe $\mathcal{C}^1$. Soit $\Gamma = (J,f)$ un arc paramétré de classe $\mathcal{C}^1$ dont le support est inclus dans U et $J = [a,b]$ i.e. $f : \left\{\begin{array}{lll} J & \to & U \\ x & \mapsto & \big(x(t), y(t)\big) \end{array}\right.$. On appelle :

- intégrale curviligne de ω le long de Γ
- circulation du champ de vecteurs $\overrightarrow{V}$ le long de Γ

le nombre I noté $\displaystyle\int_\Gamma \omega = \int_\Gamma P(x,y)dx + Q(x,y)dy$ égale à :

$$\int_a^b \Big(P\big(x(t),y(t)\big)x'(t) + Q\big(x(t),y(t)\big)y'(t)\Big)dt$$

Ou encore :

$$I = \int_a^b \overrightarrow{V}\big(x(t),y(t)\big)\big(x'(t),y'(t)\big)dt$$

$$I = \int_a^b \omega\big(x(t),y(t)\big)\big(x'(t),y'(t)\big)dt$$

Proposition : Si ω est exacte (i.e. si $\overrightarrow{V}$ est un champ de gradients), si Γ est un arc paramtré d'origine A et d'extrémité B, en notant f une primitive de ω (i.e. un potentiel scalaire de $\overrightarrow{V}$),

$$\int_{\widehat{AB}} df = f(B) - f(A)$$

Théorème 1 : Toute forme différentiable exacte est fermée.

Définition : ouvert étoilé Soit U un ouvert. Il est dit étoilé si :

$$\exists a \in U \ / \ \forall b \in U, \ [ab] \subset U$$

Théorème : théorème de Poincaré : Soit U un ouvert étoilé de $\mathbb{R}^2$ (ou $\mathbb{R}^n$). Soit ω une forme différentielle de classe $\mathcal{C}^1$ définie sur U. Si ω est fermée, alors elle est exacte.

Théorème : théorème de Green-Riemann : Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^2$. Soit K une partie élemntaire de $\mathbb{R}^2$ telle que $K \subset U$. K est notamment compact. Soit Γ un arc paramétré dont le support (arc géométrique) est la frontière de K. On suppose que K est parcouru dans le sens trigonométrique (noté Γ^+). Soit $\omega = Pdx + Qdy$ une forme différentielle de classe $\mathbb{C}^1$. Alors :

$$\int_{\Gamma^+} \omega = \iint_K \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right)$$

Ou encore :

$$\int_{\Gamma^+} Pdx + Qdy = \iint \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy$$

Application : aire d'un secteur polaire : $\Delta = \left\{ (r, \theta) \in \mathbb{R}^2 \ / \ \theta_0 \leqslant \theta \leqslant \theta_1 \text{ et } 0 \leqslant r \leqslant \rho(\theta) \right\}$ où $\mathcal{C}$ est la courbe d'équation polaire $r = \rho(\theta)$.

$$\mathcal{A}(\Delta) = \frac{1}{2} \int_{\theta_0}^{\theta_1} \rho(\theta)^2 d\theta$$

6 Surface et courbes de l'espace

Divers modes de définition d'une surface de l'espace :

Courbes de $\mathcal{E}_2$: cartésienne : $y = f(x)$;

paramétrique : $\begin{cases} x = X(t) \\ y = Y(t) \end{cases}$, $\overrightarrow{g} : \begin{cases} U \subset \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}^2 \\ t & \mapsto & \overrightarrow{g}(t) \end{cases}$;

implicite : $F(x, y) = 0$;

Surfaces de $\mathcal{E}_3$: cartésienne : $z = f(x, y)$;

paramétrique : $\begin{cases} x = X(t) \\ y = Y(t) \\ z = Z(t) \end{cases}$, $\overrightarrow{g} : \begin{cases} U \subset \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (r, s) & \mapsto & \overrightarrow{g}(r, s) \end{cases}$;

implicite : $F(x, y, z) = 0$.

Les fonctions f, $\overrightarrow{g}$ et F sont supposées de classe $\mathbb{C}^1$.

Droites et plans tangents :

droite tangente $\mathcal{T}_0$: cartésienne : $y = f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0)$, $\begin{pmatrix} 1 \\ f'(x_0) \end{pmatrix}$ dirige $\mathcal{T}_0$;

paramétrique : $\overrightarrow{g'}(t_0) = \begin{pmatrix} X'(t_0) \\ Y'(t_0) \end{pmatrix}$ dirige $\mathcal{T}_0$;

implicite : $\dfrac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \dfrac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0) = 0$, $\overrightarrow{n} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0) \\ \dfrac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) \end{pmatrix}$ est orthgonal à $\mathcal{T}_\prime$;

plan tangent $\mathcal{P}_0$ au point M_0 de $\mathcal{S}$: cartésienne : $y = f(x_0) + \dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0)$, $\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{w} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \end{pmatrix}$ dirigent $\mathcal{P}_0$;

paramétrique : $\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial X}{\partial r}(r_0, s_0) \\ \dfrac{\partial Y}{\partial r}(r_0, s_0) \\ \dfrac{\partial Z}{\partial r}(r_0, s_0) \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{w} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial X}{\partial s}(r_0, s_0) \\ \dfrac{\partial Y}{\partial s}(r_0, s_0) \\ \dfrac{\partial Z}{\partial s}(r_0, s_0) \end{pmatrix}$ dirigent $\mathcal{P}_0$;

implicite : $\dfrac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \dfrac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0) + \dfrac{\partial F}{\partial z}(x_0, y_0)(z - z_0) = 0$, $\overrightarrow{n} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0) \\ \dfrac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) \\ \dfrac{\partial F}{\partial z}(x_0, y_0) \end{pmatrix}$ est orthgonal à $\mathcal{P}_\prime$;

Position de la courbe par rapport à la tangente : Si $f \in \mathcal{E}_2(U, \mathbb{R})$,

- si $f''(x_0) > 0$, alors f est convexe au voisinage de x_0 donc sa courbe représentative est au dessus de $\mathcal{T}$;
- si $f''(x_0) < 0$, alors f est concave au voisinage de x_0 donc sa courbe représentative est en dessous de $\mathcal{T}$;
- si $f''(x_0) = 0$, il faut faire un développement limité d'ordre supérieur à 2.

Position de la surface par rapport au plan tangent $\mathcal{P}$ en (x_0, y_0) : Si $\mathcal{S}$: $f(x, y)$. Soit :

$$r = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) \qquad s = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) \qquad t = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0)$$

- si $rt - s^2 > 0$ avec $r > 0$, $\mathcal{S}_f$ est au dessus de $\mathcal{P}$;
- si $rt - s^2 > 0$ avec $r < 0$, $\mathcal{S}_f$ est en dessous de $\mathcal{P}$;
- si $rt - s^2 < 0$, le plan $\mathcal{P}$ traverse la surface : point selle ;
- si $rt - s^2 = 0$, on ne peut pas conclure.