Chapitre 20 : équations différentielles non linéaires

10/4/2012

1 Équations différentielles du 1er ordre

Objet : On s'interesse aux équations différentielles du type (résolu) $x' = f(t,x)$ où $f \in \mathcal{C}^1(U,\mathbb{R})$ avec U un ouvert de $\mathbb{R}^2$.

Définition : Soit $f \in \mathcal{C}^1(U,\mathbb{R})$ et $(E)\ :\ x' = f(t,x)$. Une solution de (E) est une fonction $\varphi : J \to \mathbb{R}$ dérivable avec J un intervalle de $\mathbb{R}$ telle que :

$$\forall t \in J,\ \big(t,\varphi(t)\big) \in U \text{ et } \varphi'(t) = f\big(t,\varphi(t)\big)$$

Conséquence : Puisque $\forall t \in J,\ \big(t,\varphi(t)\big) \in U,\ \mathcal{C}_\varphi \subset U$.

Définition : problème de Cauchy : On appelle problème de Cauchy un problème du type :

$$\begin{cases} x' = f(t,x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \text{ où } (t_0,x_0) \in U$$

Définition : solution maximale : On appelle solution maximale de (E) toute solution $\varphi : J \to \mathbb{R}$ de (E) pour laquelle il n'existe pas de solution $\tilde{\varphi} : K \to \mathbb{R}$ de (E) tel que $K \supsetneq J$ avec $\tilde{\varphi}_{|J} = \varphi$.

Théorème 1 : théorème de Cauchy-Lipschitz : existence et unicité locale : Le problème de Cauchy $\begin{cases} x' = f(t,x) \text{ où } f \in \mathcal{C}^1(U,\mathbb{R}) \\ x(t_0) = x_0 \text{ où } (t_0,x_0) \in U \end{cases}$, U ouvert de $\mathbb{R}^2$ admet une seule solution φ définie sur un intervalle ouvert J contenant t_0.
Et si ψ est une autre solution définie sur un intervalle ouvert K contenant t_0, alors :

$$\forall t \in J \cap K,\ \varphi(t) = \psi(t)$$

Propriété 1 : Si on peut prolonger φ en $\tilde{\varphi}$ sur $\tilde{J} =]a,b]$ (i.e. si $\tilde{\varphi} : \tilde{J} \to \mathbb{R}$ est solution de (E) avec $\tilde{J}$ non ouvert), alors il existe une solution $\varphi_1 : K \to \mathbb{R}$ avec $K \supset]a,b]$, K étant ouvert.

Propriété 2 : Si $\varphi :]a,b[\to \mathbb{R}$ est solution de (E) et $\lim\limits_{t \to b^-} \varphi(t) = l$ existe dans $\mathbb{R}$ et si $(b,l) \in U$, en posant $\tilde{\varphi}(b) = l$, on obtient une solution $\tilde{\varphi} :]a,b] \to \mathbb{R}$. On peut d'ailleur la prolonger en $\varphi_1 :]a,b+\varepsilon[\to \mathbb{R}$ par la propriété 1.

Propriété 3 : Toute fonction $\varphi :]a,b[\to \mathbb{R}$ solution de (E) est de classe $\mathcal{C}^1$.

Théorème 2 : théorème de Cauchy-Lipschitz : existence et solution maximale : Le problème de Cauchy $\left\{\begin{array}{l} x' = f(t,x) \text{ où } f \in \mathcal{C}^1(U,\mathbb{R}) \\ x(t_0) = x_0 \text{ où } (t_0,x_0) \in U \end{array}\right.$, U ouvert de $\mathbb{R}^2$ où $f \in \mathcal{C}^1(U,\mathbb{R})$ admet une et une seule solution maxiamle. Par ailleurs, son ensemble de définition est ouvert.

Propriété des courbes intégrales : Il existe une unique courbe intégrale maximale passant par (t_0, x_0). Les limites de la courbes sont des points de la frontière.

2 Équations différentielles à variables séparables

Définition : Il s'agit d'équations différentielles du type :

$$x' = \frac{f(t)}{g(x)}$$

où $f \in \mathcal{C}^1(I,\mathbb{R})$ et $g \in \mathcal{C}^1(J,\mathbb{R}^\star)$.
Remarque : les équations différentielles à variables séparables relèvent des théorèmes de Cauchy-Lipschitz.

3 Systèmes autonomes

Définition : On appelle système autonome tout système différentiels de la forme :

$$\left\{\begin{array}{l} x' = f(x,y) \\ y' = g(x,y) \end{array}\right.$$

où $f, g \in \mathcal{C}^1(U,\mathbb{R})$ avec U ouvert de $\mathbb{R}^2$.

Proposition : translation dans le temps Soit $\overrightarrow{\Gamma} : I \to U$ une solution du système autonome. Soit $\overrightarrow{\Gamma_a} : a + I \to U$ définie par :

$$\forall t \in a + I,\ \overrightarrow{\Gamma_a}(t) = \overrightarrow{\Gamma}(t - a)$$

Alors $\overrightarrow{\Gamma_a}$ est aussi solution du système autonome.

Résultats fondamentaux : En extrapolant le théorème de Cauchy-Lipschitz, on obtient :
- existence et « unicité » d'une solution locale ;
- existence et unicité d'une solution maximale si on a posé une condition initiale $\left\{\begin{array}{l} x(t_0) = x_0 \\ y(t_0) = y_0 \end{array}\right.$.

Étude d'un système autonome :

1. étude géométrique (ici, seul l'arc géométrique nous interesse)
   (a) recherche des points stationnaires :
   on résout $\left\{\begin{array}{l} f(x_0,y_0) = 0 \\ g(x_0,y_0) = 0 \end{array}\right.$. L'arc paramétré $\tilde{\Gamma}$: $\left\{\begin{array}{lcl} \mathbb{R} & \to & U \\ t & \mapsto & (x_0,y_0) \end{array}\right.$ est une solution évidente.
   Conséquence théorique : soit Γ un autre arc solution i.e. un arc non constant, alors Γ est régulier ;

(b) recherche d'une « intégrale première » du champ de vecteurs $\overrightarrow{V}$:
on cherche $F : U \to \mathbb{R}$ telle que $\overrightarrow{grad} F \perp \overrightarrow{V} = \big(f(x,y) g(x,y)\big)$ i.e. telle que :

$$\forall (x,y) \in U,\ \frac{\partial F}{\partial x}(x,y) \times f(x,y) + \frac{\partial F}{\partial y}(x,y) \times g(x,y) = 0$$

Après avoir trouvé une telle fonction F, on obtient que l'arc est porté par la courbe d'équation implicite $F(x,y) = k$ i.e. la ligne de niveau de la fonction $z = f(x,y)$;

2. déterminer « la loi horaire » i.e. de quelle manière l'arc est parcouru en fonction du temps :

$$\underset{\text{équation implicite}}{\mathcal{C} : F(x,y) = k} \to \underset{\text{paramétrisation}}{\left\{ \begin{array}{l} x = X(u) \\ y = Y(u) \end{array} \right.} \xrightarrow[\substack{\text{en remplaçant} \\ \text{dans le système}}]{u=U(t)\ ?} U(t) = \ldots \to \left\{ \begin{array}{l} x = X\big(U(t)\big) \\ y = Y\big(U(t)\big) \end{array} \right. = \overrightarrow{\Gamma}(t)$$