

CHAPITRE 3 : COMPLÉMENTS D'AGLÈBRE LINÉAIRE

27/9/2011

1 Familles génératrices, libres, bases

Définition 1 : Soit $(\lambda_i)_{i \in I}$ une famille de scalaires (éléments d'un corps $\mathbb{K}$).

- On dit que c'est une famille de scalaire presque tous nuls si tous les scalaires sont nuls sauf un nombre fini d'entre eux.
- L'ensemble $I' = \{i \in I \mid \lambda_i \neq 0\}$ est appelé le support de la famille $(\lambda_i)_{i \in I}$.

Définition 2 : Soit $(u_i)_{i \in I}$ une famille quelconque de vecteurs d'un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel E . On appelle combinaison linéaire de la famille de vecteurs $(u_i)_{i \in I}$ tout vecteur $u \in E$ qui s'écrit $u = \sum_{i \in I} \lambda_i u_i$ où $(\lambda_i)_{i \in I}$ est une famille de scalaires presque tous nuls.

Définition 3 : Soit $(x_i)_{i \in I}$ une famille de vecteurs d'un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel E .

1. $(x_i)_{i \in I}$ est dite génératrice si tout vecteur de E s'écrit comme combinaison linéaire de vecteurs de la famille $(x_i)_{i \in I}$ i.e. $\forall x \in E, \exists (x_i)_{i \in I} \in \mathbb{K}^I$ presque tous nuls tels que $x = \sum_{i \in I} \lambda_i x_i$ ou encore $\exists (i_1, \dots, i_n) \in I^n$ tel que $x = \sum_{j=1}^n \lambda_{i_j} x_{i_j}$.
2. $(x_i)_{i \in I}$ est dite libre - les x_i sont linéairement indépendants - si la seule combinaison linéaire des x_i égale au vecteur nul est celle pour laquelle tous les coefficients sont nuls i.e. $\forall (\lambda_i)_{i \in I} \in \mathbb{K}^I$ presque tous nuls, $\left[\sum_{i \in I} \lambda_i x_i = 0_E \right] \Rightarrow [\forall i \in I, \lambda_i = 0]$.
3. $(x_i)_{i \in I}$ est dite liée - les x_i sont linéairement dépendants - si elle n'est pas libre.
4. C'est une base si elle est à la fois génératrice et libre.

Propriété importante : Si $\mathcal{B}$ est une base de E , tout vecteur de E s'écrit de manière unique comme combinaison linéaire de vecteurs de $\mathcal{B}$.

Quelques rappels de la dimension fini :

- Un espace vectoriel de dimension fini est un espace vectoriel admettant une famille génératrice finie.
- Théorème fondamental : dans un espace vectoriel de dimension finie, toutes les bases ont le même nombre d'éléments, appelée la dimension de E noté $\dim_{\mathbb{K}} E = n$.
- Si G est génératrice, $\text{Card}(G) \geq n$.
- Si L est libre, $\text{Card}(L) \leq n$.
- Si $\mathcal{B}$ est libre ou génératrice, et si $\text{Card}(\mathcal{B}) = n$ alors $\mathcal{B}$ est une base.
- Si $\text{Card}(L) > n$, L est liée.
- Si $\text{Card}(L) < n$, L n'est pas génératrice donc $\text{Vect}(L) \neq E$.
- Théorème de la base incomplète : si L est libre et si $\text{Card}(L) = p < n$, il existe un $(n-p)$ vecteurs $u_{n-p}, \dots, u_n$ tels que $L @ (u_{n-p}, \dots, u_n)$ (concaténation) sera une base de E .

Proposition : Soit $\mathcal{B} = (e_i)_{i \in I}$ une base de E . Soit $\mathcal{F} = (f_i)_{i \in I}$ une famille de vecteurs de F . Alors

- il existe une et une seule application $\varphi : E \rightarrow F$ telle que $\forall i \in I, \varphi(e_i) = f_i$;
- φ bijective $\Leftrightarrow (f_i)_{i \in I}$ est une base de F .

Proposition : espace vectoriel produit : Soit $(E, +, \cdot)$ et $(F, \oplus, \bullet)$ deux $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels. On définit sur le produit $E \times F$

- une addition : $\forall (x, y), (x', y') \in (E \times F)^2, (x, y) \boxplus (x', y') = (x + x', y \oplus y')$;
- un produit externe : $\forall (x, y) \in E \times F, \forall \alpha \in \mathbb{K}, \alpha \otimes (x, y) = (\alpha \cdot x, \alpha \bullet y)$.

Alors $(E \times F, \boxplus, \otimes)$ est un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel. De plus, si E et F sont de dimension finie, $\dim(E \times F) = \dim E + \dim F$.

Généralisation : Si $(E_i)_{i \in [1, n]}$ est une famille de $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels de dimension finie, $\prod_{i=1}^n E_i$ est un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie avec $\dim \left(\prod_{i=1}^n E_i \right) = \sum_{i=1}^n \dim E_i$.

2 Structure d'algèbre

Définition 1 : Soit A un ensemble, $+$ et $\times$ deux lois de compositions internes sur A et $\cdot$ une loi de composition externe sur A . Si

1. $(A, +, \times)$ est un anneau (resp. commutatif, resp. intègre) ;
2. $(A, +, \cdot)$ est un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel ($\mathbb{K}$ étant un corps) ;
3. $\forall \alpha \in \mathbb{K}, \forall x, y \in A, \alpha \cdot (x \times y) = (\alpha \cdot x) \times y = x \times (\alpha \cdot y)$

On dit que $(A, +, \times, \cdot)$ est une $\mathbb{K}$ -algèbre (resp. commutative, resp. intègre).

Définition 2 : Soit $(A, +, \times, \cdot)$ une algèbre. On dit que $(A', +, \times, \cdot)$ est sous algèbre de A si A' est à la fois un sous-anneau et un sous-espace vectoriel de A . Autrement dit :

- $A' \subset A$;
- $\forall x, y \in A', \forall \alpha \in \mathbb{K},$
 1. $x + y \in A'$;
 2. $x \times y \in A'$;
 3. $\alpha \cdot y \in A'$;
- $1_A \in A'$.

Définition 3 : Soit $\varphi : A \rightarrow B$ où A et B sont deux $\mathbb{K}$ -algèbres. On dit que φ est un morphisme d'algèbre si c'est à la fois un morphisme d'anneau et une application linéaire. Autrement dit : $\forall x, y \in A, \forall \alpha \in \mathbb{K},$

- $\varphi(x + y) = \varphi(x) + \varphi(y)$;
- $\varphi(x \times y) = \varphi(x) \times \varphi(y)$;
- $\varphi(\alpha \cdot x) = \alpha \cdot \varphi(x)$;
- $\varphi(1_A) = 1_{A'}$.

3 Somme et somme directe de sous-espace vectoriel

Rappels de Sup sur la somme de sous-espaces vectoriels : Si F et G sont deux sous-espaces vectoriels de E ,

- $F \cap G$ est un sous-espace vectoriel de E (mais non $F \cup G$ a priori) ;
- $F + G = \{x + y \mid (x, y) \in F \times G\}$ est un sous-espace vectoriel, le plus petit sous-espace vectoriel contenant F et G et donc $F \cup G$;
- $F + G$ est une somme directe si $F \cap G = \{0_E\}$ (attention : faux à partir de 3 sous-espaces vectoriels) ;
- $E = F \oplus G$ i.e. F et G sont supplémentaires $\Leftrightarrow \begin{cases} E = F + G \\ F \cap G = \{0_E\} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dim E = \dim F + \dim G \\ F \cap G = \{0_E\} \end{cases}$

Définition 1 : somme de n sous-espaces vectoriels : Soient $(E_i)_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket}$ une famille de n sous-espaces vectoriels de E . On appelle somme de ces sous-espaces vectoriels le sous-espace vectoriel $\sum_{i=1}^n E_i = \left\{ \sum_{i=1}^n x_i \mid \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, x_i \in E_i \right\}$.

Définition 2 : La somme $\sum_{i=1}^n E_i$ des n sous-espaces vectoriels E_i est dite directe si elle vérifie l'une des deux propriétés équivalentes suivantes :

1. $\forall (x_1, \dots, x_n) \in \prod_{i=1}^n E_i$, si $\sum_{i=1}^n x_i = 0_E$ alors $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, x_i = 0_E$;
2. $\forall x \in \sum_{i=1}^n E_i$, $\exists! (x_1, \dots, x_n) \in \prod_{i=1}^n E_i$ tel que $x = \sum_{i=1}^n x_i$.

Théorème 1 : Soit $(E_i)_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket}$ une famille de n sous-espaces vectoriels.

$$\left[\text{La somme } \sum_{i=1}^n E_i \text{ est directe} \right] \Leftrightarrow \left[\dim \left(\sum_{i=1}^n E_i \right) = \sum_{i=1}^n (\dim E_i) \right]$$

Théorème 2 : Soient $E_1, \dots, E_n$ n sous-espaces vectoriels de E . Si la somme $\bigoplus_{i=1}^n E_i$ est directe,

$$\left[E = \bigoplus_{i=1}^n E_i \right] \Leftrightarrow \left[\dim E = \sum_{i=1}^n \dim E_i \right]$$

Rappels de Sup sur les projecteurs : Soient F et G deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E i.e. $F \oplus G = E$. Ainsi, $\forall x \in E$, $\exists! (y, z) \in F \times G$ tel que $x = y + z$.

- Projection de E sur F de direction G : $p : \begin{cases} E \rightarrow E \\ x = y + z \mapsto y \end{cases}$;
- Projection de E sur G de direction F : $q : \begin{cases} E \rightarrow E \\ x = y + z \mapsto z \end{cases}$;
- $[p \in \mathcal{L}(E) \text{ et } p \circ p = p] \Leftrightarrow [p \text{ est un projecteur}]$;
- $p \circ q = 0_{\mathcal{L}(E)} = q \circ p$; $p + q = Id_E$;
- $Im\ p = F$; $Ker\ p = G$.

Définition : Soit n sous-espaces vectoriels de E tels que $E = \bigoplus_{i=1}^n E_i$ ($\star$). La projection de E sur E_j relativement à la décomposition ($\star$) est la projection de E sur E_j de direction $\bigoplus_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n E_i$.

Autrement dit, $p : \begin{cases} E \longrightarrow E \\ x = \sum_{i=1}^n x_i \mapsto x_j \end{cases} .$

Propriétés :

- $p_j \in \mathcal{L}(E)$ et $p_j \circ p_j = p_j$. p_j est donc un projecteur ;
- si $i \neq j$, $p_i \circ p_j = 0_{\mathcal{L}(E)} = p_j \circ p_i$;
- $\sum_{i=1}^n p_j = Id_E$;
- $Im\ p_j = E_j \quad Ker\ p_j = \bigoplus_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n E_i$.

4 Noyau et image d'une application linéaire :

Théorème 1 : Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$, H sous-espace vectoriel de E . Soit $\tilde{f} : \begin{cases} H \rightarrow Im\ f \\ h \mapsto f(h) \end{cases} .$

$\tilde{f}$ est un isomorphisme si et seulement si H est un supplémentaire de $Ker\ f$.

Théorème 2 : théorème du rang : Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie, F un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel. Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$.

Alors $Im\ f$ est de dimension finie et $\dim E = \dim(Im\ f) + \dim(Ker\ f)$.

Théorème 3 : Si E et F sont deux espaces vectoriels de même dimension finie n et si $f \in \mathcal{L}(E, F)$,

f isomorphisme $\Leftrightarrow rg(f) = n \Leftrightarrow f$ surjective $\Leftrightarrow Ker\ f = \{0_E\} \Leftrightarrow f$ injective.

Lemme : Si G et H sont deux supplémentaires d'un même sous-espace vectoriel F , alors ils ont même dimension.

Définition : Si un sous-espace vectoriel F de E admet un supplémentaire G de dimension finie, on appelle codimension de F la dimension de G noté $\text{codim } F$.

Si $E = F \oplus G$, $\text{codim } F = \dim G$.

Théorème du rang généralisé : Soient E et F deux $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels dont l'un au moins est de dimension finie. Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Alors

- $Im\ f$ est de dimension finie ;
- $Ker\ f$ est de codimension finie ;
- $\text{codim } (Ker\ f) = \dim(Im\ f)$.

Théorème : interpolation de Lagrange : Soient $x_1, \dots, x_n$ n réels distincts. Soit pour $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$,

$$L_i = \frac{\prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n (X - x_j)}{\prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n (x_i - x_j)}$$

Alors :

- la famille $(L_i)_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket}$ est une base de $\mathbb{K}_{n-1}[X]$ dite de Lagrange relative au n-uplet $(x_1, \dots, x_n)$;
- le problème d'interpolation i.e. chercher $P \in \mathbb{K}_{n-1}[X]$ tel que $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, P(x_i) = y_i$ où $(y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ admet une et une seule solution $P = \sum_{i=1}^n y_i L_i$.

5 Dualité

Définition : hyperplan : On appelle hyperplan d'un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel tout sous-espace vectoriel de codimension 1.

Ainsi, $[H \text{ est un hyperplan}] \Leftrightarrow [\exists a \in E \setminus \{0_E\} \mid H \oplus Vect(a) = E]$.

Théorème 1 : Soit $\varphi \in \mathcal{L}(E, \mathbb{K})$ i.e. une forme linéaire avec $\varphi \neq \mathcal{O}$ l'application nulle. Alors

- $Ker \varphi$ est un hyperplan H ;
- si $\psi \in \mathcal{L}(E, \mathbb{K})$ s'annule sur H , alors $\exists \alpha \in \mathbb{K} \mid \psi = \alpha \cdot \varphi$.

Théorème 2 : Tout hyperplan est le noyau d'une forme linéaire non nulle.

Définition : Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel. On appelle dual de E que l'on note souvent E^* l'ensemble $\mathcal{L}(E, \mathbb{K})$ i.e. l'ensemble des formes linéaires de E sur $\mathbb{K}$.

Proposition : $\forall a \in E \setminus \{0_E\}, \exists \varphi \in \mathcal{L}(E, \mathbb{K}) \mid \varphi(a) = 1$.

Corollaire : L'ensemble $\{x \in E \mid \forall \varphi \in \mathcal{L}(E, \mathbb{K}), \varphi(x) = 0_{\mathbb{K}}\} = \{0_E\}$.

Définition : base dual d'une base $\mathcal{B}$ de E : Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E . On appelle base duale de E la base $\mathcal{B}^* = (e_1^*, \dots, e_n^*)$ du dual E^* où $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, e_i^*$ est défini par $\forall j \in \llbracket 1, n \rrbracket, e_i^*(e_j) = \delta_{i,j}$.

Théorème : $(e_1^*, \dots, e_n^*)$ est bien une base du dual E^* .

Conséquence : relation de dualité : Soit (e_1, e_n) une base de E et $(e_1^*, \dots, e_n^*)$ sa base duale. $\forall x \in E, x = e_1^*(x)e_1 + \dots + e_n^*(x)e_n, \forall \varphi \in E^*, \varphi(e_1)e_1^* + \dots + \varphi(e_n)e_n^*$.

Théorème : base antéduale : À toute base $\mathcal{B}'$ de E^* est associée une et une seule base $\mathcal{B}$ de E dont $\mathcal{B}'$ est la duale. $\mathcal{B}$ est appelée la base antéduale de $\mathcal{B}'$.

Théorème 1 : Soit F un sous-espace vectoriel de E de dimension finie avec $\dim F = p, \dim E = n$. Les formes linéaires sur E qui s'annulent sur F constituent un sous-espace vectoriel de E^* de dimension $n - p$.

Théorème 2 : Si $(\varphi_1, \dots, \varphi_q)$ est une famille libre de E^* , alors $F = \bigcap_{i=1}^q Ker \varphi_i$ est un sous-espace vectoriel de dimension $n - q$.

De plus, si $\varphi \in E^*, [\varphi \text{ s'annule sur } F] \Leftrightarrow [\exists (\lambda_1, \dots, \lambda_q) \in \mathbb{K}^q \mid \varphi = \sum_{i=1}^q \lambda_i \varphi_i]$.

6 Rappels et compléments de calcul matriciel

Définition : trace : Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. $M = (a_{i,j})_{i,j \in \llbracket 1,n \rrbracket}$. On appelle trace de M la somme de ses éléments diagonaux : $tr(M) = \sum_{i=1}^n a_{i,i}$.

Propriétés :

1. $tr : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{K}$ est linéaire.
2. $\forall A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), tr(A \times B) = tr(B \times A)$.
3. Si A et B sont des matrices semblables, $tr(A) = tr(B)$.

Rappels :

- Deux matrices A et B sont dites semblables s'il existe $P \in GL_n(\mathbb{K})$ telle que $B = P^{-1}AP$.
- Si E est un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension n , de base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$, toute matrice A est la matrice d'un endomorphisme de E dans $\mathcal{B}$ i.e. $A = M_{\mathcal{B}}(u)$ où $u \in \mathcal{L}(E)$.
- Si $\mathcal{B}'$ est une autre base de E , si $P = Pass(\mathcal{B}, \mathcal{B}')$, alors la matrice de u dans la base $\mathcal{B}'$ est : $A' = P^{-1}AP$.
- Ainsi deux matrices semblables sont deux matrices qui représentent le même endomorphisme dans des bases différentes.

Corollaire : Si $u \in \mathcal{L}(E)$, si $A = M_{\mathcal{B}}(u)$, $tr(A)$ ne dépend pas de la base $\mathcal{B}$ choisie. On la note $tr(u)$: c'est la trace de l'endomorphisme u .

Définition : Soient $A, B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$. A et B sont dites équivalentes si $\exists P \in GL_p(\mathbb{K}), \exists Q \in GL_q(\mathbb{K}) / B = Q^{-1}AP$.

Propriété : Deux matrices sont équivalentes si et seulement si elles ont le même rang.

Lemme : Si $M \in \mathcal{M}_{p,q}$, M est équivalente à une matrice de format $p \times q$ où $r = rg(M)$

suivante :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & & 0 & & & \\ & \ddots & & & & 0 \\ 0 & & 1 & & & \\ - & - & - & + & - & - \\ & & 0 & & & 0 \end{array} \right)_{p \times q}.$$

Corollaire : $rg(t_M) = rg(M)$.

Opérations élémentaires sur les matrices :

Idée : effectuer une opération sur les lignes (resp. sur les colonnes) d'une matrice revient à multiplier cette matrice à gauche (resp. à droite) par une matrice inversible.

On applique les modification sur la matrice $\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$.

- $L_i \leftarrow \alpha L_j : \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \alpha & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ pour faire $L_2 \leftarrow L_2 + \alpha L_1$.

- $L_i \leftrightarrow L_j : \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ pour faire $L_1 \leftrightarrow L_2$.
- $L_i \leftrightarrow \alpha \cdot L_i, \alpha \neq 0 : \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}$ pour faire $L_3 \leftarrow \alpha \cdot L_3$.

Utilités :

- Résoudre un système d'équation linéaires.
- Calculer le rang d'une matrice.
- Calculer l'inverse d'une matrice (méthode de Gauss-Jordan).
- Calculer le déterminant.