Chapitre 4 : réduction des endomorphismes

5/10/2011

1 Sous-espaces stables

Défintion : Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et F un sous-espace vectoriel de E.

- On dit que F est stable par u si $u(F) \subset F$ i.e. $\forall x \in F,\ u(x) \in F$. On peut alors définir la restriction $u_{|F} : \begin{cases} F \to F \\ x \mapsto u(x) \end{cases}$ et $u_{|F} \in \mathcal{L}(E)$: $u_{|F}$ s'appelle l'endomorphisme induit de u sur F.

Propriété : Si u et v commutent, alors $Ker\ v$ et $Im\ v$ sont stables par u.

Représentation matricielle en dimension finie : Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, F un sous-espace vectoriel stable par u. Soit $(e_1, \dots, e_p)$ une base de F et complétons là par $(e_{p+1}, \dots, e_n)$. Soit donc $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_p, e_{p+1}, \dots, e_n)$. Soit $M = M_{\mathcal{B}}(u)$.

$M = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{p,1} & \times & \dots & \times \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{p,1} & \dots & a_{p,p} & \times & \dots & \times \\ 0 & \dots & 0 & \times & \dots & \times \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \times & \dots & \times \end{pmatrix}$ de la forme $M = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$ où $A \in \mathcal{M}_{p,p}(\mathbb{K})$, $B \in \mathcal{M}_{p,n-p}(\mathbb{K})$,
$0 \in \mathcal{M}_{n-p,p}(\mathbb{K})$, $C \in \mathcal{M}_{n-p,n-p}(\mathbb{K})$.
$\det M = \det A \times \det C$.

Généralisation :

$$M = \begin{pmatrix} A_1 & & & 0 \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & A_p \end{pmatrix}$$

On aurait en fait $E = \bigoplus_{i=1}^{p} E_i$ où chaque E_i est stable par u (puisque visuellement, $\forall x \in E_i,\ u(x) \in E_i$), on aura $\det M = \prod_{i=1}^{p} \det(A_i)$.

2 Polynômes d'endomorphismes, polynômes de matrices

Définition : Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ avec $P = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i$. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

- On note $P(u)$ l'endomorphisme défini par $P(u) = \sum_{i=0}^{n} a_i u^i$ (où $u^0 = Id$)

  i.e. $P(u) = a_0 \cdot Id + a_1 \cdot u + \ldots + a_n \cdot u^n$.
- On note $P(A)$ la matrice définie par $P(A) = \sum_{i=0}^{n} a_i A^i$ (où $A^0 = I_n$)

  i.e. $P(A) = a_0 \cdot I_n + a_1 \cdot A + \ldots + a_n \cdot A^n$.

Propriété : Si $A = M_{\mathcal{B}}(u)$, $P(A) = M_{\mathcal{B}}(P(u))$.

Proposition : Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Soit $\Phi : \begin{cases} \mathbb{K}[X] \to \mathcal{L}(E) \\ P \mapsto P(u) \end{cases}$ et $\Psi : \begin{cases} \mathbb{K}[X] \to \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \\ P \mapsto P(A) \end{cases}$.
Alors les endomorphismes Φ et Ψ sont des morphismes d'algèbres.

Conséquences : Reprenons $\Phi : \begin{cases} \mathbb{K}[X] \to \mathcal{L}(E) \\ P \mapsto P(u) \end{cases}$ est un morphisme d'algèbre.
$Im\ \Phi = \{\Phi(P) \mid P \in \mathbb{K}[X]\} = \{P(u) \mid P \in \mathbb{K}[X]\}$. C'est une sous-algèbre de $\mathcal{L}(E)$ notée $\mathbb{K}[u]$.
C'est même une sous-algèbre commutative de l'algèbre non commutative $\mathcal{L}(E)$.
De même avec les matrices, $\mathbb{K}[A] = \{P(A) \mid P \in \mathbb{K}[X]\}$ est une sous-algèbre commutative de l'algèbre non commutative $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Propriétés : Soient $u, v \in \mathcal{L}(E)$.
- Si v commute avec u, v commute avec $P(u)$.
- $P({}^tA) = {}^t(P(A))$ $\quad \overline{P(A)} = \overline{P}\left(\overline{A}\right)$.
- $Im\ (P(u))$ et $Ker\,(P(u))$ sont stables par u.

Idéal annulateur et polynôme minimal : Revenons au morphisme d'algèbre $\Phi : \begin{cases} \mathbb{K}[X] \to \mathcal{L}(E) \\ P \mapsto P(u) \end{cases}$
(raisonnement identique avec les matrices).
$Ker\ \Phi = \{P \in \mathbb{K}[X] \mid P(u) = 0\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}[X]$ mais surtout un idéal de $\mathbb{K}[X]$ appelé l'idéal annulateur de l'endormorphisme u.
Or, dans $\mathbb{K}[X]$, les seuls idéaux sont du type $M \cdot \mathbb{K}[X] = (M)$ i.e. constitué des multiples de l'un d'entre eux.
- Ou $M = 0_{\mathbb{K}[X]}$, $P = 0$ est donc le seul polynôme annulateur de u (que si E est de dimension finie) ;
- Ou bien $M \neq 0_{\mathbb{K}[X]}$: on peut, quitte à le diviser par son coefficient dominant, choisir M unitaire : ce sera le « polynôme minimal » de u.

Proposition : Si $\dim E$ est finie, si $u \in \mathcal{L}(E)$, alors il existe au moins un polynôme non nul annulateur de u.

Définition : On appelle polynôme minimal de $u \in \mathcal{L}(E)$ où E est de dimension finie (resp de $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$) l'unique polynôme unitaire qui engendre l'idéal des polynômes annulateurs.

Lemme : Soit $P, Q \in \mathbb{K}[X]$ tels que $P \wedge Q = 1$. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Alors :

$$Ker\,((PQ)(u)) = Ker\,(P(u)) \oplus Ker\,(Q(u))$$

Généralisation : Si $P_1, \ldots, P_k$ sont k polynômes deux à deux premiers entre eux, alors :

$$Ker\left[\left(\prod_{i=1}^{k} P_i\right)(u)\right] = \bigoplus_{i=1}^{k} Ker\left(P_i\left(u\right)\right)$$

Théorème : théorème de décomposition des noyaux : Soit P un polynôme annulateur de u (par exemple le polynôme minimal μ_u). Si P se décompose en $P = \prod_{i=1}^{k} P_i$, avec $\forall i, j \in [\![1, k]\!],\ i \neq j,\ P_i \wedge P_j = 1$, alors $E = \bigoplus_{i=1}^{k} Ker\left(P_i\left(u\right)\right)$.

Proposition : lien avec le polynôme minimal d'un endormorphisme : Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ avec $\dim E = n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{B}$ une base de E. Soit $M = M_{\mathcal{B}}(u)$. u et M ont le même polynôme minimal : $\mu_u = \mu_M$.

Corollaire : Deux matrices semblables ont le même polynôme minimal.

Propriété : polynôme minimal et endormorphisme réduit : Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, soif F un sous-espace vectoriel de E stable par u. Soit u_F l'endomorphisme induit, alors $\mu_{u_F} | \mu_u$.

3 Valeurs propres

Définitions 1 : Soit $u \in \mathcal{L}(E)$.

1. Soit $\lambda \in \mathbb{K}$. On dit que λ est valeur propre de u s'il existe $x \in E \setminus \{0_E\}$ tel que $u(x) = \lambda x$.
2. Soit $x \in E \setminus \{0_E\}$: on dit que x est vecteur propre de u s'il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $u(x) = \lambda x$.
3. L'ensemble des valeurs propres d'un endomorphisme est appelé le spectre de u et est noté $Sp_{\mathbb{K}}(u)$.

Propriété : Si $\dim E$ est finie, alors : [λ est valeur propre] $\Leftrightarrow$ $[(u - \lambda \cdot Id_E) \notin GL(E)]$.

Définition 2 : Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, $\lambda \in Sp(u)$. L'ensemble $E_\lambda(u) = Ker\left(u - \lambda \cdot Id_E\right)$ est un sous-espace vectoriel de E distinct de $\{0_E\}$ appelé le sous-espace propre associé à λ et à u. Il est constitué de tous les vecteurs propres associés à λ de E et de 0_E.

Proposition : Soit $u \in \mathcal{L}(E)$.

1. La somme d'une famille finie de sous-espace vectoriel propre de u distincts est nécessairement directe $\left(\bigoplus_{i=1}^{k} E_{\lambda_i}\right)$.
2. Toute famille de vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes est nécessairement libre.

Propriété : Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, $\lambda \in \mathbb{K}$, $P \in \mathbb{K}[X]$. Si $\lambda \in Sp(u)$ alors $P(\lambda) \in Sp\left(P\left(u\right)\right)$.

Théorème : valeurs propres et polynôme minimal : Soit $u \in \mathcal{L}(E)$.

1. Les valeurs propres de u sont racines de tout polynôme annulateur de u.
2. Les valeurs propres de u sont les racines du polynôme minimal de u.

Définition : cas des matrices : Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Soit $u \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^n) \mid \mathcal{M}_{\mathcal{C}_n}(\mathbb{K}^n) = M$ avec $\mathcal{C}_n$ la base canonique de $\mathbb{K}^n$.

1. Soit $\lambda \in \mathbb{K}$. On dit que λ est une valeur propre de M s'il est valeur de u donc $\exists X \in \mathbb{K}^n$ tel que $X \neq 0$ et $M \cdot X = \lambda \cdot X$.
2. Soit X un vecteur de $\mathbb{K}^n$. On dit que X est vecteur propre de M s'il est non nul et s'il existe $\lambda \in \mathbb{K} \mid M \cdot X = \lambda \cdot X$.
3. Le spectre de M est aussi le spectre de u donc l'ensemble des valeurs propres de M : on le note $Sp_{\mathbb{K}}(M)$.
4. Le sous-espace propre associé à λ est $E_\lambda(M) = Ker\,(M - \lambda \cdot I)$ i.e. $Ker\,(u - \lambda \cdot Id_E)$.

Propriété : changement de corps : Si $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $Sp_{\mathbb{R}}(M) \subset Sp_{\mathbb{C}}(M)$.

Propriétés :

1. $[\lambda$ valeur propre de $M] \Leftrightarrow [(M - \lambda \cdot I) \notin GL_n(\mathbb{K})] \Leftrightarrow [\det\,(M - \lambda \cdot I) = 0]$
2. $[\lambda \in Sp(M)] \Leftrightarrow [P(\lambda) \in Sp\,(P\,(M))]$
3. Les valeurs propres de M sont racines de tout polynôme annulateur et sont les racines de son polynôme minimal. $Sp(M) = Rac(\mu_M)$.
4. Si deux matrices sont semblables, elles ont le même spectre.

4 Polynôme caractéristique

Définition 1 : polynôme caractéristique d'une matrice : Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On appelle polynôme caractéristique de A le polynôme $P = \det\,(X \cdot I - A)$.
P est souvent noté χ_A. $d^\circ \chi_A = n$ si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. $\chi_A = X^n - tr(A) \cdot X^{n-1} + \ldots + (-1)^n \det A$.

Propriété : Deux matrices semblables ont forcément le même polynôme caractéristique.

Définition 2 : Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, $A = M_{\mathcal{B}}(u)$ où $\mathcal{B}$ est une base quelconque. On appelle polynôme caractéristique de u le polynôme $\chi_u = \chi_A$. Il ne dépend pas de la base $\mathcal{B}$ choisie. $\chi_u = X^n - tr(u) \cdot X^{n-1} + \ldots + (-1)^n \det u$. Retenons aussi que $\chi_u(\lambda) = \det(\lambda \cdot Id_E - u)$.

Proposition : cas d'un endomorphisme induit : Si u stabilise F i.e. F est stable par u où F est un sous-espace vectoriel de E, alors $\chi_{u_F} | \chi_u$ où u_F endomorphisme induit $\in \mathcal{L}(F)$.

Corollaire : Si $E = \bigoplus_{i=1}^{k} F_i$ et si $u \in \mathcal{L}(E)$ est tel que $\forall i \in [\![1, k]\!]$, F_i est stable par u, alors $\chi_u = \prod_{i=1}^{k} \chi_{u_i}$ où $u_i = u_{F_i}$ i.e. l'endomorphisme induit de u sur F_i.

Théorème : Les valeurs propres de $u \in \mathcal{L}(E)$ sont les racines du polynôme caractéristique de u.

Définition : ordre de multiplicité : Soit λ une valeur propre de u (resp. de A). On dit que λ est d'ordre $k \in \mathbb{N}^\star$ si λ est racine de χ_u (resp. de χ_A) d'ordre k.

Théorème : Si λ est valeur propre de u d'ordre m_i, alors $1 \leqslant \dim E_{\lambda_i} \leqslant m_i$.

Théorème : théorème de Hamilton-Cayley : Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ (resp. $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$). Soit χ_u le polynôme caractérisitique de u (resp. χ_A celui de A), alors $\chi_u(u) = 0_{\mathcal{L}(E)}$ (resp. $\chi_A(A) = 0$).

Corollaire : $\mu_u | \chi_u$.

5 Endomorphismes diagonalisables

Définitions : Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

1. On dit que u est diagonalisable s'il existe une base $\mathcal{B}$ de E pour laquelle $M_{\mathcal{B}}(u)$ est diagonale.
2. On dit que A est diagonalisable si elle est semblable à une matrice diagonale.

Propriété : Si A est diagonalisable en $\Delta = P^{-1}AP$, alors les valeurs propres sont les éléments de la diagonale de Δ et la multiplicité de chacune est son nombre d'occurence dans cette diagonale.

Théorème : Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Les cinq affirmations suivantes sont équivalentes.

1. u est diagonalisable.
2. E possède une base de vecteurs propres.
3. $E = \bigoplus_{i=1}^{k} E_{\lambda_i}$ où $k = Card(Sp(u))$ et $E_{\lambda_i} = Ker\,(u - \lambda \cdot Id_E)$.
4. $\sum_{i=1}^{k} \dim(E_{\lambda_i}) = n$.
5. χ_u est scindé i.e. $\chi_u = \prod_{i=1}^{k} (X - \lambda_i)^{m_i}$ et $\forall i \in [\![1, k]\!]$, $\dim E_{\lambda_i} = m_i$.

Corollaire : Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Si χ_u est scindé à racines simples, alors u est diagonalisable.

Lemme : Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, diagonalisable. Soit $Sp(u) = \{\lambda_i, i \in [\![1, k]\!]\}$. $\forall i \in [\![1, k]\!]$, $E_i = Ker\,(u - \lambda_i Id_E)$. Soit p_i la projection de E sur E_i de direction $\bigoplus_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{k} E_j$. Alors $u = \lambda_1 p_1 + \lambda_2 p_2 + \ldots + \lambda_k p_k$ et $\forall P \in \mathbb{K}$, $P(u) = P(\lambda_1)p_1 + P(\lambda_2)p_2 + \ldots + P(\lambda_k)p_k$.

Théorème : caractérisation par le polynôme minimal : Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. u est diagonalisable si et seulement si son polynôme minimal est scindé à racines simples.

Corollaire : $u \in \mathcal{L}(E)$ est diagonalisable si et seulement s'il existe un polynôme annulateur scindé à racines simples.

6 Endomorphismes trigonalisable

Définition : Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

1. u est dite trigonalisable s'il existe une base $\mathcal{B}$ de E pour laquelle $M_{\mathcal{B}}(u)$ est triangulaire supérieure.
2. M est dite trigonalisable si elle est semblable à une matrice T triangulaire supérieure.

Théorème : caractérisation : Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Les quatres affirmations suivantes sont équivalentes :

1. u est trigonalisable.
2. χ_u est scindé.
3. Il existe un polynôme annulateur de u scindé.
4. μ_u est scindé.

Corollaire : Si E est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel, alors tout endomorphisme u de E est trigonalisable. On aussi $\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, M est trigonalisable.