Chapitre 5 : espaces vectoriels normés : topologie

17/10/2011

---

1 Norme

Définition : Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). On appelle norme toute application $N : E \to \mathbb{R}^+$ tel que :

1. $\forall x \in E$, $N(x)$ est bien définie et $N(x) \in \mathbb{R}^+$;
2. $\forall x \in E$, $N(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0_E$;
3. $\forall x \in E$, $\forall \alpha \in \mathbb{K}$, $N(\alpha \cdot x) = |\alpha| \cdot N(x)$;
4. $\forall (x,y) \in E^2$, $N(x+y) \leqslant N(x) + N(y)$: inégalité de Minkowski.

Propriété : seconde inégalité triangulaire : $\forall x, y \in E$, $|N(x) - N(y)| \leqslant N(x-y)$.

Définition : distance : Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel muni d'une norme N (on dit que E est un espace vectoriel normé). Alors l'application $d : \left\{ \begin{array}{c} E \times E \longrightarrow \mathbb{R}^+ \\ (u,v) \mapsto d(u,v) = \|u - v\| \end{array} \right.$ est une distance. En effet, elle vérifie les propriétés suivantes :

1. c'est bien une application de $E \times E$ dans $\mathbb{R}^+$;
2. $\forall u, v \in E$, $d(u,v) \Leftrightarrow u = v$;
3. $\forall (u,v) \in E^2$, $d(u,v) = d(v,u)$;
4. $\forall (u,v,w) \in E^3$, $d(u,w) \leqslant d(u,v) + d(v,w)$.

Corollaire : seconde inégalité triangulaire : $\forall (u,v,w) \in E^3$, $|d(u,v) - d(u,w)| \leqslant d(u,w)$.

Définition : distance à d'un « point »à une partie : Soit $x \in E$ et $A \subset E$ avec A non vide. On appelle distance de x à A le nombre $d(x,a) = Inf\left(\{d(x,y), y \in A\}\right)$.

Propriété : $\forall x, y \in E$, $|d(x,a) - d(y,a)| \leqslant d(x,y)$.

Proposition : norme produit : Si E et F sont deux $\mathbb{K}$-espace vectoriel normés par des normes N_1 et N_2, alors l'application $N : \left\{ \begin{array}{c} E \times F \longrightarrow \mathbb{R}^+ \\ (u,v) \mapsto N(u,v) = Max(N_1(u), N_2(v)) \end{array} \right.$ est une norme sur l'espace vectoriel produit $E \times F$. N est souvent appelé norme produit.

Généralisation : Avec n espace vectoriel normé $F_1, \ldots, F_n$. La norme produit sur $E = F_1 \times \ldots \times F_n$ est : $N : \left\{ \begin{array}{l} F_1 \times \ldots F_n \longrightarrow \mathbb{R}^+ \\ (x_1, \ldots, x_n) \mapsto Max\left(\|x_i\|_{F_i}, i \in [\![1,n]\!]\right) \end{array} \right.$.

Définitions : boule ouverte - boule fermée : Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé. Soit $a \in E$, $r \in \mathbb{R}^{\star+}$.

- On appelle boule ouverte de centre a de rayon r est : $\mathcal{B} = \{x \in E \mid d(a,x) < r\}$.
- On appelle boule fermée de centre a de rayon r est : $\mathcal{B}_f = \{x \in E \mid d(a,x) \leqslant r\}$.

Définition : partie convexe : Soit $A \subset E$. A convexe $\Leftrightarrow \forall a, b \in A,\ [a,b] \in A$.

Propriété : Les boules ouvertes et fermées de E sont des parties convexes de E.

Définition : normes équivalentes : Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé et N_1 et N_2 deux normes sur E.

1. On dit que N_1 est dominée par N_2 s'il existe $\alpha \in \mathbb{R}^{\star+}$ tel que : $\forall x \in E,\ N_1(x) \leqslant \alpha N_2(x)$.
2. On dit que N_1 et N_2 sont équivalentes si N_1 est dominée par N_2 et N_2 est dominée par N_1 ou encore, $\exists \alpha, \beta \in \mathbb{K}^\star$ tels que $\forall x \in E,\ \alpha N_2(x) \leqslant N_1(x) \leqslant \beta N_2(x)$.

Si deux normes sont équivalentes, les notions de limites, de convergences, de continuité, etc ne dépendent pas de la norme choisie. Seule exception : le caractère lipschitzien d'une fonction.

Théorème : théorème de Riesz : Dans un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, toutes les normes sont équivalentes.

Définitions : parties bornées : Soit E un espace vectoriel normé de norme notée $\|.\|_E$.

1. Une partie A non vide de E est dite bornée si $\exists k \in \mathbb{R}^+$ tel que $\forall x \in A,\ \|x\|_E \leqslant k$.
2. Une fonction $f : X \to E$ où X est un ensemble quelconque non vide est dite bornée si la partie $f(X) = \{f(x) \mid x \in X\}$ est bornée.
   Ou encore $\exists k \in \mathbb{R}^+$ tel que $\forall x \in X,\ \|f(x)\|_E \leqslant k$.

Proposition : L'espace vectoriel $\mathcal{B}(X,E)$ des fonctions $f : X \to E$ bornées où X non vide et E un espace vectoriel normé est lui-même normé par $\|f\|_\infty = Sup\{\|f(x)\|_E \mid x \in X\}$.

Définition : fonctions k-lipschitziennes : Soit $f : E \to F$ où E et F sont des espaces vectoriels normés. Soit $k \in \mathbb{R}^+$. On dit que f est k-lipschitzienne si :

$$\forall (x,y) \in E^2,\ \|f(x) - f(y)\|_F \leqslant k\|x-y\|_E$$

Propriété : Si $f : E \to F$ est k-lipschitzienne et $g : F \to G$ est k'-lipschitzienne avec $k, k' \in \mathbb{R}^+$, alors $(g \circ f)$ est $k \cdot k'$-lipschitzienne.

2 Suites et séries dans un espace vectoriel normé

Définition : suites convergentes - divergentes : Soit $u \in E^\mathbb{N}$ i.e. $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite à valeur dans E un espace vectoriel.

1. S'il existe $l \in E$ tel que $\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N}$, si $n \geqslant n_0$, alors $\|u_n - l\|_E \leqslant \varepsilon$, on dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente, que sa limite est l et on écrit $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$.
2. Une suite divergente est une suite non convergente.

Proposition : cas d'un espace vectoriel produit : Soit $E = \prod_{j=1}^{k} E_j$ un espace vectoriel produit normé. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$ i.e. $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \in E$ donc $u_n = (u_{n,1}, \dots, u_{n,k})$ où $\forall j \in [\![1,k]\!],\ u_{n,j\in E_j}$. Soit $l = (l_1, \dots, l_k) \in E$.

$$u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\|.\|_E} l \Longleftrightarrow \forall j \in [\![1,k]\!],\ u_{n,j} \xrightarrow[n\to+\infty]{\|.\|_{E_j}} l_j$$

Proposition : On retrouve les même propriétés algébriques et structures comme l'unicité de la limite, les opérations sur les limites, etc.

Définition : valeur d'adhérence : Soit $(u_n)_n \in E^{\mathbb{N}}$ et $\alpha \in E$. On dit que α est valeur d'adhérence de la suite $(u_n)_n$ si elle est limite d'une suite extraite de $(u_n)_n$.

Proposition : Toute suite convergente admet une et une seule valeur d'adhérence.

Théorème : théorème de Bolzano-Weirtrass : Le théorème de Bolzano-Weirtrass (vrai dans $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ et tout $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie) peut s'énoncer « toute suite bornée de E admet au moins une valeur d'adhérence ».

Définition : domination et négligeabilité : Soient $(u_n)_n \in E^{\mathbb{N}}$ et $(\alpha_n)_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ avec E un espace vectoriel normé.

1. On dit que $(u_n)_n$ est dominée par $(\alpha_n)_n$ et on écrit $u_n = O(\alpha_n)$ si $\exists k \in \mathbb{R}^+,\ \exists n_0 \in \mathbb{N}$ tel que si $n \geqslant n_0$ alors $\|u_n\|_E \leqslant k|\alpha_n|$.
2. On dit que $(u_n)_n$ est négligeable devant $(\alpha_n)_n$ et on écrit $u_n = o(\alpha_n)$ si $\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N}$ tel que si $n \geqslant n_0$ alors $\|u_n\|_E \leqslant \varepsilon|\alpha_n|$.

Définition : équivalences de suites : Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$. On dit que $(u_n)_n$ est équivalente à $(v_n)_n$ et on écrit $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n$ si $u_n - v_n = o\left(\|v_n\|\right)$.

Définition : séries dans un espace vectoriel normé : Soit $(u_n)_n \in E^{\mathbb{N}}$. Soit $(S_n)_n \in E^{\mathbb{N}}$ définie par $\forall n \in \mathbb{N},\ S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$. On dit que la série $\sum u_n$ converge si la suite des sommes partielles $(S_n)_n$ converge. On note alors $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} S_n$.

3 Élements de topologie

Définitions : voisinage, ouvert, fermé :

1. On dit que $V \in \mathcal{P}(E)$ où E est un espace vectoriel normé est un voisinage de $a \in E$ s'il existe $r > 0$ tel que $\mathcal{B}(a,r) \subset V$. On note $\mathcal{V}(a)$ l'ensemble des voisinages de a.
2. On dit que $\Omega \in \mathcal{P}(E)$ est un ouvert s'il est voisinage pour chacun de ses points. Autrement dit, Ω ouvert $\Leftrightarrow \forall a \in \Omega,\ \exists r > 0$ tel que $\mathcal{B}(a,r) \in \mathcal{V}(a)$.
3. On appelle fermé tout ensemble F dont le complémentaire $\complement_E F$ est ouvert.

Propriétés :

1. $\varnothing$ et E sont à la fois ouverts et fermés.
2. Toute réunion quelconque d'ouverts est un ouvert et toute intersection finie d'ouverts est un ouvert.
3. Toute intersection quelconque de fermés est un fermé et toute réunion finie de fermés est un fermé.

Théorème : caractérisation séquentielle des fermés : Soit F une partie d'un espace vectoriel normé E. [F est fermé] $\Leftrightarrow$ [Toute suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de F qui converge admet une limite qui appartient à F].

Définition : ouverts, fermés, voisinages « relatifs » : Soit A une partie E. On dit que Ω est un ouvert (resp. fermé, resp. un voisinage) relatif de A s'il existe un ouvert U (resp. un fermé, resp. un voisinage) de E tel que $\Omega = U \cap A$.

Définition : adhérence : Soit $A \in \mathcal{P}(E)$ et $a \in E$. On dit que a est adhérent à A si $\forall r > 0,\ \mathcal{B}(a, r) \cap A \neq \varnothing$.
L'« adhérence » de A est l'ensemble des points adhérents à A. Elle est noté $\overline{A}$.

Définition : intérieur : Soit $A \in \mathcal{P}(E)$ et $a \in E$. On dit que a est « intérieur » à A si $\exists r > 0/\ \mathcal{B}(a, r) \subset A$.
L'intérieur de A est l'ensemble des points intérieurs à A. Il est noté $\mathring{A}$.

Théorème : caractérisation séquentielle d'un point adhérent : Soit $A \in \mathcal{P}(E)$, $x \in E$.
$\left[x \in \overline{A}\right] \Leftrightarrow \left[\exists (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in A^{\mathbb{N}} \mid \lim\limits_{n\to+\infty} a_n = x\right] \Leftrightarrow [\forall r > 0,\ \mathcal{B}(x, r) \cap A \neq \varnothing]$.

Propriétés : Soit $A, B \in \mathcal{P}(E)$.

1. $\complement\overline{A} = \overset{\circ}{\widehat{\complement A}}$ $\qquad \complement\mathring{A} = \overline{\complement A}$;
2. $[A \subset B] \Leftrightarrow \left[\mathring{A} \subset \mathring{B} \text{ et } \overline{A} \subset \overline{B}\right]$;
3. $\mathring{A} \subset A \subset \overline{A}$;
4. $[A \text{ ouvert}] \Leftrightarrow [A = \mathring{A}]$ $\qquad [A \text{ fermé}] \Leftrightarrow [A = \overline{A}]$;
5. $\mathring{A}$ est ouvert et c'est le plus grand ouvert inclus dans A ;
6. $\overline{A}$ est fermé et c'est le plus petit fermé inclus dans A.

Définiton : frontière : Soit $A \in \mathcal{P}(E)$ avec E un espace vectoriel normé. La frontière de A est l'ensemble $FrA = \overline{A} \setminus \mathring{A} = \overline{A} \cap \complement\mathring{A}$.

Propriétés : FrA est fermé et $FrA = Fr\left(\complement A\right)$.

Définition : partie dense : Soit $A, B \in \mathcal{P}(E)$. On dit que A est dense dans B si $\overline{A} \supset B$.
Notamment, pour $B = E$. A dense dans $E \Leftrightarrow \overline{A} = E$.

Théorème : caractérisation séquentielle de la densité : A dense dans $E \Leftrightarrow \forall x \in E,\ x \in \overline{A}$
$\Leftrightarrow \forall x \in E,\ \exists (a_n)_n \in A^{\mathbb{N}}$ telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = x$.

4 Fonctions dans un espace vectoriel normé : limite, continuité

Définition : limite d'une fonction en un point : Soit $f : A \to F$ où $A \subset E$ et E, F deux espaces vectoriels normés. Soit $a \in \overline{A}$, soit $l \in F$.
On dit que f admet pour limite l en a (ou au point a) et on écrit $\lim\limits_{x \to a} f(x) = l$ ou $\lim\limits_{a} f = l$ i.e. si $\forall \varepsilon > 0,\ \exists \alpha > 0$ tel que $\|x - a\|_E < \alpha$ et $x \in A$, alors $\|f(x) - l\|_F \leqslant \varepsilon$.

Théorème : caractérisation séquentielle : Soit $f : A \to F$ avec $A \subset E$ et E, F deux espaces vectoriels normés. Soit $a \in \overline{A},\ l \in F$. $\left[\lim\limits_{a} f = l\right] \Leftrightarrow [\forall (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in A^{\mathbb{N}}$ qui converge vers a, la suite $\left(f\left(x_n\right)\right)_n$ converge vers $l]$
Si $a \in A$, $[f$ continue en $a] \Leftrightarrow [\forall (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que si $x_n \to a$, alors $f(x_n) \to f(a)]$

Proposition : limite et voisinage : Soit $f : A \to F$ avec $A \subset E$ et E, F deux espaces vectoriels normés. Soit $a \in \overline{A}$, $l \in F$. $\left[\lim\limits_{a} f = l\right] \Leftrightarrow [\forall W \in \mathcal{V}(l),\ \exists V \in \mathcal{V}(a)$ tel que $f(V \cap A) \subset W]$

Définition : domination, négligeabilité : Soit $f : A \to F$ et $\varphi : A \to \mathbb{R}$ avec $A \subset E$ et E, F deux espaces vectoriels normés. Soit $a \in A$.

1. On dit que f est dominée par φ au voisinage de a et on écrit $f = \underset{a}{O}(\varphi)$ si $\exists k \in \mathbb{R}^{+\star},\ \exists V \in \mathcal{V}(a)$ tel que $\forall x \in V \cap A,\ \|f(x)\|_F \leqslant k|\varphi(x)|$.
2. On dit que f est négligeable devant φ au voisinage de a et on écrit $f = \underset{a}{o}(\varphi)$ si $\forall \varepsilon > 0,\ \exists V \in \mathcal{V}(a)$ tel que $\forall x \in V \cap A,\ \|f(x)\|_F \leqslant \varepsilon|\varphi(x)|$.

Définition : équivalence : Soit $f : A \to F$ et $g : A \to F$ avec $A \subset E$ et E, F deux espaces vectoriels normés. Soit $a \in A$.
On dit que f est équivalente à g au voisinage de a et on écrit $f \underset{a}{\sim} g$ si $f = g + o\left(\|g\|\right)$

Définition : continuité sur une partie A : Soit $f : A \to F$ avec F un espace vectoriel. f est dite continue sur A si elle est continue en chaque point de A.

Proposition : continuité et densité : Soit $A \in \mathcal{P}(E)$ avec E un espace vectoriel normé et $B \in \mathcal{P}(E)$ telle que B dense dans A. Soit f, g deux fonctions continues de A dans F avec F un espace vectoriel normé. Si f et g coïncident sur B (i.e. $f_{|B} = g_{|B}$) alors f et g sont égales.
Autrement dit, si B est dense dans A, si $f, g \in \mathcal{C}(A, F)$, si $\forall x \in B,\ f(x) = g(x)$, alors $\forall x \in A,\ f(x) = g(x)$.

Théorème : continuité et topologie : Soit $d : E \to F$ avec E, F deux espaces vectoriels normés. Les trois affirmations suivantes sont équivalentes :

1. f est continue sur E ;
2. l'image réciproque de tout ouvert de F est un ouvert de E ;
3. l'image réciproque de tout fermé de F est un fermé de E.

5 Applications linéaires continues

Théorème fondamental : Soit E et F deux espaces vectoriels normés. Soit $u \in \mathcal{L}(E,F)$. Les affirmations suivantes sont équivalentes :

1. $\exists k \in \mathbb{R}^+$ tel que $\forall x \in E,\ \|u(x)\|_F \leqslant k\|x\|_E$;
2. u est continue ;
3. u est continue en 0_E ;
4. u est bornée sur la boule unité fermée $\mathcal{B}_f(0_E, 1)$;
5. u est bornée sur la sphère unité $\mathcal{S}(0_E, 1)$.

Proposition : Soit N_1 et N_2 deux normes de E un espace vectoriel normé. Les affirmations suivantes sont équivalentes :

1. N_1 et N_2 sont équivalentes ;
2. $Id : \left\{ \begin{array}{l} (E, N_1) \to (E, N_2) \\ x \mapsto x \end{array} \right.$ est bicontinue ;
3. les ouverts de E pour la norme N_1 sont les ouverts de E pour la norme N_2.

Propostion : Soit $u \in \mathcal{LC}(E,F)$ avec E, F deux espaces vectoriels normés. Les trois nombres suivants sont égaux et leur valeur est notée $|||u|||$.

- $a = \underset{\substack{x \in E \\ \|x\|_E = 1}}{Sup} \|u(x)\|_F = Sup\left\{\|u(x)\|_F,\ x \in \mathcal{S}(0_E, 1)\right\}$;
- $b = \underset{\substack{x \in E \\ \|x\|_E \leqslant 1}}{Sup} \|u(x)\|_F = Sup\left\{\|u(x)\|_F,\ x \in \mathcal{B}_f(0_E, 1)\right\}$;
- $c = \underset{x \in E\setminus\{0_E\}}{Sup} \dfrac{\|u(x)\|_F}{\|x\|_E} = Sup\left\{\dfrac{\|u(x)\|_F}{\|x\|_E},\ x \in E \setminus \{0_E\}\right\}$.

Proposition : L'application $|||.||| : \left\{ \begin{array}{l} \mathcal{LC}(E,F) \to \mathbb{R}^+ \\ u \mapsto |||u||| \end{array} \right.$ avec E, F deux espaces vectoriels normés est une norme sur $\mathcal{LC}(E,F)$ et est appelée la « norme subordonnée ».

Propriété : Soit E un espace vectoriel normé et $u \in \mathcal{LC}(E,F)$, $\forall x \in E$, $\|u(x)\|_F \leqslant |||u||| \times \|x\|_E$.

Conséquence : Soit E un espace vectoriel normé et $u \in \mathcal{LC}(E,F)$,
$|||u||| = Min\left(\left\{k \in \mathbb{R}^+ \text{ tel que } \forall x \in E,\ \|u(x)\|_F \leqslant k\|x\|_E\right\}\right)$.

Définition : notion d'algèbre normée : Une algèbre $(\mathcal{A}, +, \times, \cdot)$ est dite normée s'il existe une norme N sur l'espace vectoriel $(\mathcal{A}, +, \cdot)$ qui vérifie en outre deux propriétés :

4. $\forall (u,v) \in \mathcal{A}^2,\ N(u \times v) \leqslant N(u) \times N(v)$;
5. $N(1_{\mathcal{A}}) = 1$.

On dit alors que N est une norme d'algèbre.

Proposition : $(\mathcal{LC}(E), |||.|||)$ est une algèbre normée. On a notamment $|||u \circ v||| \leqslant |||u||| \times |||v|||$.

Proposition : cas des applications bilinéaires : Soit $B : E \times F \to G$ une application bilinéaire où E, F et G sont trois espaces vectoriels normées. S'il existe $k \in \mathbb{R}^+$ tel que $\forall (x,y) \in E \times F$, $\|B(x,y)\| \leqslant k\|x\|_E \times \|y\|_F$ alors B est continue.