Chapitre 6 : espaces vectoriels normés : compacité, complétude

14/11/2011

1 Compacité

Théorème : théorème de Bolzano-Weirtrass : De toute suite bornées de $\left(\mathbb{K}^k\right)^{\mathbb{N}}$ où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et $k \in \mathbb{N}^\star$, on peut extraire une suite convergente.

Définition : partie compacte : Soit E un espace vectoriel normé et A une partie de E.
A est dite compacte si toute suite d'éléments de A admet au moins une valeur d'adhérence $a \in A$.

Théorème 1 : Tout compact est nécessairement fermé et borné.

Propositions : Soit E et F deux espaces vectoriels normés.

1. Si A est un compact de E et si $B \subset A$ et si B est fermé, alors B est compact.
2. Soit A (resp. B) un compact de E (resp. de F), alors $A \times B$ est un compact de $E \times F$.

Théorème 2 : L'image d'un compact par une fonction continue est un compact.
Aurement dit : si $f \in \mathcal{C}(E, F)$ où E et F sont deux espaces vectoriels normés. Si A est un compact de E, alors $f(A)$ est un compact de F.

Théorème : Toute fonction continue sur un segement de $\mathbb{R}$ et à valeur dans $\mathbb{R}$ est bornée et atteint ses bornes.
Plus précisement : si $f \in \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$, alors $\exists m, M \in \mathbb{R}$ tels que $f([a, b]) = [m, M]$.

Proposition : Soit $f : A \to \mathbb{R}$ continue où A est un compact d'un espace vectoriel normé E, alors f est bornée et atteint ses bornes.

Définition : uniforme continuité : Soit $f : A \to F$ avec E, F deux espaces vectoriels normés et $A \subset E$. f est dite uniformément continue sur A si :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \alpha > 0 \text{ tel que } \forall (x, y) \in A^2,\ \|x - y\|_E \leqslant \alpha \Rightarrow \|f(x) - f(y)\|_F \leqslant \varepsilon$$

Théorème : théorème de Heine : Toute fonction continue sur un compact est uniformément continue.

2 Complétude

Définition : suites de Cauchy : Soit E un espace vectoriel normé. Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$ est dite de Cauchy si :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall (m, n) \in \mathbb{N}^2,\ \text{si } n \geqslant m \geqslant n_0 \text{ alors } \|u_n - u_m\|_E \leqslant \varepsilon$$

Propriétés :

1. Toute suite convergente est une suite de Cauchy.
2. Toute suite de Cauchy est bornée.
3. Toute suite de Cauchy qui admet une valeur d'adhérence est convergente.

Définition : partie complète : Soit E un espace vectoriel normé. Soit $A \in \mathcal{P}(E)$. On dit que A est complète si toute suite de Cauchy d'éléments de A est convergente dans A (i.e. sa limite appartient à A).

Propositions :

1. Toute partie complète est fermée.
2. Toute partie fermée d'une partie complète est complète.
3. Toute partie compacte est complète.

Définition : espace de Banach : On appelle espace de Banach tout espace vectoriel normé complet.

Proposition : Les parties complètes d'un espace de Banach sont ses parties fermées.

Théorème : critère de Cauchy pour les fonctions : Soit F un espace de Banach, E un espace vectoriel normé et $A \subset E$. Soit $f : A \Rightarrow F$ et $a \in \overline{A}$. $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ existe si et seulement si

$\forall \varepsilon > 0$, $\exists \alpha > 0$, tel que $\forall (x, y) \in A^2$, si $\|x - a\|_E \leqslant \alpha$ et $\|y - a\|_E \leqslant \alpha$ alors $\|f(x) - f(y)\|_F \leqslant \varepsilon$.