Chapitre 7 : espaces vectoriels normés : dimension finie, connexité par les arcs

17/11/2011

1 Espaces vectoriels de dimension finie

Théroème fondamental : théorème de Riesz : Dans un espace vectoriel normé de dimension finie, toutes les normes sont équivalentes.

Conséquences : En dimension finie, quelque soit la question topologique posée (à l'exception près de la k-lipschitzianité), le résultat ne dépend pas de la norme choisie et on choisit la norme la plus adaptée.
Une fonction est k-lipschitzienne pour une norme et elle sera k'-lipschitzienne pour une autre norme.

2 Compacité

Théorème : théorème de Bolzano-Weirstrass : Si E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$), toute suite bornée d'éléments de E admet au moins une valeur d'adhérence.

Proposition : Les compacts d'un espace vectoriel normé de dimension finie sont ses fermés bornés.

3 Complétude

Théorème : Tout espace vectoriel normé de dimension finie est un espace de Banach (i.e. est complet).

Proposition : Les parties complètes d'un espace vectoriel de dimension finie sont ses parties fermées.

Corollaire : Tout sous-espace vectoriel de dimension finie d'un espace vectoriel normé quelconque E est fermé.

4 Continuité et linéarité

Théorème : Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$ où E est un espace vectoriel normé de dimension finie et F un espace vectoriel normé quelconque, alors f est continue.

Proposition : Soit E et F deux espaces vectoriels de diemensions finies. Soit $(f_n)_n \in \mathcal{L}(E,F)^{\mathbb{N}}$. Soit $\forall n \in \mathbb{N},\ A_n = \mathcal{M}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f_n) = (a_{i,j}^n)$. $A = (a_{i,j})_{i,j} = \mathcal{M}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f)$. Les cinq affirmations suivantes sont équivalentes :

1. $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n = f$;
2. $\forall x \in E,\ \lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = f(x)$;
3. $\forall j \in [\![1,q]\!],\ \lim\limits_{n\to+\infty} f_n(e_j) = f(e_j)$;
4. $\forall (i,j) \in [\![1,p]\!] \times [\![1,q]\!],\ \lim\limits_{n\to+\infty} a_{i,j}^n = a_{i,j}$;
5. $\lim\limits_{n\to+\infty} A_n = A$ quelque soit les normes choisies.

Proposition : Soit E, F et G trois espaces vectoriels normés. Si $\dim E$ et $\dim F$ sont finies, si f est linéaire de $E \times F$ dans G, alors f est continue.

5 Connexité par arcs

Définition : arc chemin : Soit $A \subset E$ où E est un espace vectoriel normé. Soit $(a,b) \in A^2$. On appelle arc (ou chemin) de A joignant a à b toute application continue $\varphi : [\alpha, \beta] \to A$ telle que $\varphi(\alpha) = a$ et $\varphi(\beta) = b$ où $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tels que $\alpha < \beta$.

Définition : partie connexe par arcs : Une partie A d'un espace vectoriel normé E est dite connexe par arcs si pour tout couple $(a,b) \in A^2$, il existe un arc joignant a et b.

Définition : partie étoilée : A une partie d'un espace vectoriel normé E est dite étoilée si $\exists a \in A$ tel que $\forall b \in A,\ [a,b] \subset A$.

Théorème : connexité par arcs et continuité : Soit $f \in \mathcal{C}(E,F)$ avec E, F deux espaces vectoriels normés. Soit $A \in \mathcal{P}(E)$. Si A est connexe par arcs, alors $f(A)$ est connexe par arcs.

Théorème : Les parties connexes par arcs de $\mathbb{R}$ sont les intervalles (autrement dit les parties convexes).

Théorème : théorème des valeurs intermédiaires généralisé : Soit E un espace vectoriel normé, soit $A \subset E$ avec A connexe par arcs. Soit $f \in \mathcal{C}(A, \mathbb{R})$.

- $f(A)$ est un intervalle ;
- $\forall (a,b) \in f(A)^2,\ \forall \lambda \in [a,b]$ ou $[b,a]$, $\exists x \in A$ tel que $f(x) = \lambda$.

Théorème : Soit $f : I \to J$ continue. Si f est bijective, alors elle est strictement monotone sur I.

6 Compléments sur les séries dans un espace de Banach

Proposition : critère de Cauchy : Soit $\sum u_n$ une série dans un espace de Banach E avec $(u_n)_n \in E^{\mathbb{N}}$. Elle est convergente si et seulement si

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \text{si } n \geqslant m \geqslant n_0,\ \text{alors } \left\| \sum_{i=m+1}^{n} u_i \right\| \leqslant \varepsilon$$

Théorème : Soit E un espace de Banach. Si la série $\sum u_i$ est absolument convergente, alors elle est convergente.

Définition : Une algèbre de Banach est une algèbre normée complète et de dimension finie (en tant qu'espace vectoriel).

Théorème : série géométrique dans un espace de Banach : Soit $(\mathcal{A}, +, \times, \cdot)$ une algèbre de Banach de norme notée $\|.\|$. Soit $u \in \mathcal{A}$ tel que $\|u\| < 1$, alors

- la série $\sum u^n$ converge absolument ;
- $(1_A - u)$ est inversible (dans l'anneau $\mathcal{A}$) et $(1_{\mathcal{A}} - u)^{-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} u^n$.

Théorème : série exponentielle : Soit $(\mathcal{A}, +, \times, \cdot)$ une algèbre de Banach. Pour tout $u \in \mathcal{A}$, la série « exponentielle » $\sum \frac{u^n}{n!}$ converge absolument et $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{u^n}{n!}$ est notée $\exp(u)$ ou e^u.

De plus, $\|e^u\| \leqslant e^{\|u\|}$.
Enfin, si u et $v \in A$ commutent, $e^{u+v} = e^u \times e^v$.