Chapitre 8 : suites et séries de fonctions

22/11/2011

Dans tout le chapitre, les applications sont du type $A \to F$ où $A \subset E$ avec E un espace vectoriel normé et F un espace de Banach. Le plus souvent, $E = F = \mathbb{R}$. $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1 Suites de fonctions : divers types de convergence

Définition : convergence simple : Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de A dans F. Soit f une fonction de A dans F. On dit que $(f_n)_n$ converge simplement vers f et on écrit $f_n \xrightarrow{\text{c.s.}} f$ si

$$\forall x \in A,\ f_n(x) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f(x)$$

Définition : convergence uniforme : Soit $\forall n \in \mathbb{N}\ f_n : A \to F, f : A \to F$. On dit que la suite de fonction $(f_n)_n$ converge uniformément vers f si :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ tel que si } n \geqslant n_0 \text{ alors } \forall x \in A,\ \|f_n(x) - f(x)\| \leqslant \varepsilon$$

On note $f_n \xrightarrow{\text{c.u.}} f$.

Proposition : Si $f_n \xrightarrow{\text{c.u.}} f$, alors $f_n \xrightarrow{\text{c.s.}} f$.

Théorème 1 : conservation de la continuité par convergence uniforme : Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de A dans F. Soit $f : A \to F$. Si $\forall n \in \mathbb{N}$ (ou à partir d'un certain rang), f_n est continue et si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f, alors f est continue.

Théorème 2 : double passage à la limite : Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de A dans F (F étant un espace de Banach). Soit $a \in \overline{A}$. On suppose :
- $\forall n \in \mathbb{N},\ \lim\limits_{x\to a} f_n(x)$ existe et vaut b_n ;
- $(f_n)_n$ converge uniformément vers f.

Alors :
- $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ existe ;
- $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} b_n$.

Théorème 3 : conservation du caractère borné par convergence uniforme : Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de A dans F. Soit $f : A \to F$. Si $(f_n)_n$ converge uniformément vers f et $\forall n \in \mathbb{N},\ f_n$ est bornée, alors f est bornée.

Définition - proposition : convergence en moyenne : On définit pour toute fonction $f \in \mathcal{C}([a,b],\mathbb{K})$ la norme N_1 (implicitement, $a < b$) :

$$N_1(f) = \int_a^b |f(t)|dt = \|f\|_1$$

Définition : Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in (\mathcal{C}([a,b],\mathbb{K}))^{\mathbb{N}}$. Soit $f \in \mathcal{C}([a,b],\mathbb{K})$. On dit que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en moyenne vers f (au sens de $\|.\|_1$ si $\lim\limits_{n\to+\infty} \|f_n - f\|_1 = 0$.

Proposition : lien entre convergence en moyenne et convergence des intégrales : Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $f \in \mathcal{C}([a,b],\mathbb{K})$. Si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en moyenne vers f sur $[a,b]$, alors :

$$\int_a^b f_n(t)dt \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_a^b f(t)dt$$

Théorème : lien entre convergence uniforme, en moyenne et des intégrales : Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur $[a,b]$, alors $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en moyenne vers f sur $[a,b]$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_a^b f_n(t)dt = \int_a^b f(t)dt$.

Définition : Soit $f_n : I \to \mathbb{K}$ et $f : I \to \mathbb{K}$ avec I un intervalle de $\mathbb{R}$. On dit que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur tout segment de I si pour tout segment J tel que $J \subset I$, $f_{n|_J} \overset{\text{c.u.}}{\longrightarrow} f_{|_J}$.

Proposition : Soit $f_n : I \to \mathbb{K}$ et $f : I \to \mathbb{K}$ avec I un intervalle de $\mathbb{R}$. Si $\forall n \in \mathbb{N}$, f_n est continue sur I et si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur tout segment de I, alors f est continue sur I.

Définition : convergence quadratique : On dit que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in (\mathcal{C}([a,b],\mathbb{K}))^{\mathbb{N}}$ converge vers f en moyenne quadratique si $\|f_n - f\|_2 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. C'est donc la convergence au sens $\|.\|_2$ avec $\forall f \in \mathcal{C}([a,b],\mathbb{R}),\ \|f\|_2 = \left(\int_a^b |f(t)|^2 dt\right)^{1/2}$.

Lemme : $\forall f \in \mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$,

$$\|f\|_1 \leqslant \sqrt{b-a}\|f\|_2 \leqslant (b-a)\|f\|_\infty$$

Théorème : lien entre convergence uniforme, quadratique et en moyenne : Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}\mathcal{C}([a,b],\mathbb{K})^{\mathbb{N}}$.

$$\left[f_n \overset{\text{c.u.}}{\longrightarrow} f\right] \Rightarrow \left[f_n \overset{\|\cdot\|_2}{\longrightarrow} f\right] \Rightarrow \left[f_n \overset{\|\cdot\|_1}{\longrightarrow} f\right] \Rightarrow \left[\int_a^b f_n(t)dt \to \int_a^b f(t)dt\right]$$

2 Convergence uniforme et dérivation

Proposition : convergence uniforme et primitivation : Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in (\mathcal{C}(I,\mathbb{K}))^{\mathbb{N}}$. Soit $f \in \mathcal{C}(I,\mathbb{K})$.
On suppose que $(f_n)_n$ converge uniformément vers f sur tout segment $J \subset I$. Soit, pour tout entier naturel n, g_n la primitive de f_n sur I qui s'annule en a et g la primitive de f sur I qui s'annule en a.
Alors $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers g sur J.

Convergence uniforme et dérivation : Soit $(f_n)_n \in \left(\mathcal{C}^1(I,\mathbb{K})\right)^{\mathbb{N}}$. On suppose que :
- $f_n \xrightarrow{\text{c.s.}} f$ sur I ;
- $f_n' \xrightarrow{\text{c.u.}} g$ sur tout segment de I.

Alors
- $f \in \mathcal{C}^1(I,\mathbb{K})$;
- $f' = g$;
- $f_n \xrightarrow{\text{c.u.}} f$ sur tout segment de I.

3 Application aux séries de fonctions

Définition : Si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une série de fonctions de A dans $\mathbb{K}$, $\sum f_n$ désigne une « série de fonction » (de terme général f_n). On note, pour tout entier naturel n : $S_n = \sum_{k=0}^{n} f_k$ la somme partielle, c'est une fonction.
Si la suite de fonction $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge (simplement ou uniformément) vers S, on dira que la série de fonctions $\sum f_n$ converge et a pour somme S.

Définition : convergence simple : On dit que $\sum f_n$ converge simplement et *a* pour somme S si la suite de fonction $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers S.
Ou encore si $\forall x \in A$, $\sum f_n(x)$ converge et a pour somme un scalaire noté $S(x)$.

Définition : convergence uniforme : $\sum f_n$ converge uniformément et a pour somme S si $S_n \xrightarrow{\text{c.u.}} S$ i.e. $\lim_{n\to+\infty} \|S - S_n\|_\infty = 0$.

Théorème :
1. Si $\sum f_n$ converge uniformément alors $f_n \xrightarrow{\text{c.u.}} 0$;
2. $\sum f_n$ converge uniformément et a pour somme S où S est la somme de $\sum f_n$ au sens de la convergence simple $\Leftrightarrow R_n \xrightarrow{\text{c.u.}} 0$ où R_n est le reste d'ordre n : $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k$.

Définition : convergence absolue : On dit que la série de fonctions $\sum f_n$ converge absolument si la série de fonction $\sum |f_n|$ converge simplement.

Proposition : Convergence absolue $\Rightarrow$ convergence simple.

Définition : convergence normale : Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in (\mathcal{B}(A,\mathbb{K}))^{\mathbb{N}}$. On dit que la série de fonction $\sum f_n$ converge normalement si la série numérique $\sum \|f_n\|_\infty$ converge.

Théorème : lien entre convergence normale et autre type de convergence : Si $\sum f_n$ converge normalement alors elle converge uniformément et absolument et donc simplement.

Théorème : Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions, $f_n : A \to \mathbb{K}$. On suppose que $\sum f_n$ converge uniformément et a pour somme $S = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$.

1. Conservation de la continuité pour la somme d'une série convergeant uniformément : si $\forall n \in \mathbb{N}$, $f_n \in \mathcal{C}(A, \mathbb{K})$, alors $S \in \mathcal{C}(A, \mathbb{K})$.
2. Intervertion des symboles $\lim_{x\to a}$ et $\sum_{n=0}^{+\infty}$: si $a \in \overline{A}$, si $\forall n \in \mathbb{N}$, $\lim_{x\to a} f_n(x)$ existe et vaut b_n, alors $\sum b_n$ converge. Soit B sa somme. $\lim_{x\to a} f(x)$ existe et vaut B.
3. Conservation du caractère borné : si $\forall n \in \mathbb{N}$, $f_n \in \mathcal{B}(A, \mathbb{K})$, alors $S = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n \in \mathcal{B}(A, \mathbb{K})$.

Pour la suite, $A = I$, intervalle de $\mathbb{R}$.

4. Intervertion des symboles $\int_a^b$ et $\sum_{n=0}^{+\infty}$: si $\forall n \in \mathbb{N}$, $f_n \in \mathcal{C}(I, \mathbb{R})$, si $a, b \in I$, $a < b$,
$$\int_a^b \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)\right) dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_a^b f_n(t)dt$$
5. Primitivation : soit $\forall n \in \mathbb{N}$, g_n la primitive de f_n sur I qui s'annule en a. Soit G la primitive de S sur I qui s'annule en a. Alors $\sum g_n$ converge uniformément et a pour somme G.
6. Intervertion de la dérivation et du signe $\sum_{n=0}^{+\infty}$: si $\forall n \in \mathbb{N}$, $f_n \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{K})$, si $\sum f_n$ converge simplement sur I et a pour somme S. Si $\sum f_n'$ converge uniformément sur tout segment de I et a pour somme T.
Alors $S \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{K})$, $S' = T$ et $\sum f_n$ converge uniformément
$$\left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n\right)' = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n'$$

Théorème : séries dans une algèbre normée : Dans une algèbre normée $\mathcal{A}$:

1. la série de fonction $\sum f_n$ où $f_n : u \mapsto u^n$ $(u \in \mathcal{A})$ converge absolument sur $\mathcal{B}(0_{\mathcal{A}}, 1)$ donc simplement et normalement et donc uniformément sur toute boule fermée $\mathcal{B}_f(0_{\mathcal{A}}, r)$ avec $0 < r < 1$ et donc sur tout compact $A \subset \mathcal{B}(0_{\mathcal{A}}, 1)$.
2. la série de fonction $\sum \frac{u^n}{n!}$, $u \in \mathcal{A}$ converge absolument et simplement sur A et normalement donc uniformément sur toute boule fermé $\mathcal{B}_f(0_{\mathcal{A}}, R)$, $R \in \mathbb{R}^+$, donc sur tout compact.

4 Quelques grand théorèmes d'approximation de fonctions

Définition : subdivision : La subdivision d'un segment $[a, b]$ est un $n+1$-upplet $(n \geqslant 1)$ $(a_0, a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ tel que $a = a_0 < a_1 < \ldots < a_n = b$.

Définition : fonction en escalier : Toute fonction $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ pour laquelle il existe une subdivision $(a_0, \ldots, a_n)$ de $[a, b]$ telle que $\forall i \in [\![0, n-1]\!]$, $f_{|]a_i, a_{i+1}[}$ est constante est une fonction continue en escalier.
On montre que $(\mathcal{E}([a, b], \mathbb{R}), +, \cdot)$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

Définition : fonction continue par morceaux : Toute fonction $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ pour laquelle il existe une subdivision $(a_0, \ldots, a_n)$ de $[a, b]$ telle que $\forall i \in [\![0, n-1]\!]$, $f_{|]a_i, a_{i+1}[}$ est continue et prolongeable par continuité sur $[a_i, a_{i+1}]$ i.e. $\lim_{x \to a_i^+} f(x)$ et $\lim_{x \to a_i^-} f(x)$ existent dans $\mathbb{R}$.
$(\mathcal{C}_m([a, b], \mathbb{R}), +, \cdot)$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.
Évidemment, $\mathcal{E}([a, b], \mathbb{R}) \subset \mathcal{C}_m([a, b], \mathbb{R})$.

Lemme : $\forall f \in \mathcal{C}_m([a, b], \mathbb{R})$, $\exists g \in \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$ et $h \in \mathcal{E}([a, b], \mathbb{R})$ telles que $f = g + h$.

Théorème 1 : Toute fonction continue par morceaux est limite uniforme d'une suite de fonction en escalier.

Théorème 2 : Toute fonction continue sur un segment est la limite uniforme d'une suite de fonctions affines par morceaux et continues.

Théorème 3 : Toute fonction continue sur un segment est limite uniforme d'une suite de fonctions polynômes.