Chapitre 9 : séries entières

1/12/2011

1 Définition

Définition : série entière : on appelle sérien entière de la variable complexe (resp. réelle) toute série de fonctions du type $\sum a_n z^n$ (resp. $\sum a_n x^n$) où $(a_n)_n \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ (resp. $(a_n)_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$).

Lemme : lemme d'Abel : Soit $a \in \mathbb{R}^{+\star}$ tel que $(a_n r^n)_n$ soit une suite bornée avec $(a_n)_n \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. Alors $\forall z \in \mathcal{B}(0_{\mathbb{C}}, r)$, la série $\sum a_n z^n$ converge absolument et donc simplement.

Propriété : Soit $(a_n)_n \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. Soient :
- $A = \{r \in \mathbb{R}^+ /\ (a_n r^n)_n \text{ est bornée }\}$
- $B = \{r \in \mathbb{R}^+ /\ (a_n r^n)_n \text{ converge vers } 0\}$

Alors $Sup\ A = Sup\ B$.

Définition : rayon, disque et cercle de convergence : Soit $\sum a_n z^n$ une série entière où $(a_n)_n \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. On appelle :

Rayon de convergence : élément de $\mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$ défini par $R = Sup\{r \in \mathbb{R}^+ \setminus\ (a_n r^n)_n \text{ est bornée }\} = Sup\{r \in \mathbb{R}^+ /\ a_n r^n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0\}$;

Disque de convergence : le « disque » $\mathcal{D}(0, R) = \{z \in \mathbb{C} /\ |z| < R\}$;

Cercle de convergence : le « cercle » $\mathcal{C}(0, R) = \{z \in \mathbb{C} /\ |z| = R\}$.

Propriété : Les séries $\sum a_n z^n$, $\sum |a_n| z^n$, $\sum M a_n z^n$ où $M \in \mathbb{C}^\star$ ont le même rayon de convergence.

2 Convergence de la série entière $\sum a_n z^n$

Théorème : Soit $\sum a_n z^n$ une série entière avec $(a_n)_n \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. Soit R son rayon de convergence.

1. La série entière converge absolument donc simplement sur le disque de convergence $\mathcal{D}(0, R) = \{z \in \mathbb{C} /\ |z| < R\}$;
2. La série entière converge normalement donc uniformément sur tout disque fermé $\mathcal{D}_f(0, R_1)$ avec $0 < R_1 < R$;
3. $\forall z \in \mathbb{C} /\ |z| > R$, la série diverge ;
4. La fonction $S : \begin{cases} \mathcal{D}(0, R) \to \mathbb{C} \\ z \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n \end{cases}$ est continue sur $\mathcal{D}(0, R)$.

Propriété : Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R. Si $\sum a_n R^n$ converge absolument. $\sum a_n z^n$ converge normalement sur $\mathcal{D}_f(0,R)$.

3 Propriétés

Propriété : Si $P \in \mathbb{C}[X] \setminus \{0_{\mathbb{C}[X]}\}$, la série entière $\sum P(n) z^n$, a pour rayon de convergence $R = 1$.

Propriétés : Soient $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ de rayons de convergences respectifs R_a et R_b.

1. si $\forall n \in \mathbb{N}$, $|a_n| \leqslant |b_n|$, alors $R_a \geqslant R_b$;
2. si $a_n = O(|b_n|)$ ou $a_n = o(|b_n|)$, alors $R_a \geqslant R_b$;
3. si $a_n \sim b_n$, alors $R_a = R_b$.

Théorème : Soient $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ de rayons de convergences respectifs R_a et R_b. Soient $\sum s_n z^n$ et $\sum p_n z^n$ respectivement somme et produit de Cauchy des deux séries précédentes i.e. $\forall n \in \mathbb{N}$, $s_n = a_n + b_n$ et $p_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_{n-k} b_k$. Soit R_s et R_p les rayons de convergence de ces deux dernières. Alors

1. $R_s \geqslant Min(R_a, R_b)$, $R_p \geqslant Min(R_a, R_b)$;
2. si $R_a \neq R_b$, alors $R_s = Min(R_a, R_b)$;
3. on pose $R = Min(R_a, R_b)$. $\forall z \in \mathcal{D}(0,R)$,
   - $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} s_n z^n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n + \sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n$;
   - $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} p_n z^n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n \times \sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n$.

4 Cas des séries réelles

Proposition 1 : intégrales : Soit $\sum a_n t^n$ une série entière réelle (où $(a_n)_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$) de rayon de convergence R et de somme S. Alors $\forall a, b \in]-R, R[$,

$$\int_a^b \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n dt = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \int_a^b t^n dt$$

Proposition 2 : primitive : Soit $\sum a_n t^n$ une série entière réelle de rayon de convergence R et de somme S. Alors les primitives de S sur $]-R, R[$ s'écrivent

$$t \mapsto k + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \frac{t^{n+1}}{n+1} \text{ où } k \in \mathbb{R}$$

Lemme : série « dérivée » : Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R. Soit la série entière $\sum n a_n z^{n-1}$ dite « série dérivée ». Cette série a aussi R pour rayon de convergence.

Théorème : Soit $\sum a_n r^n$ une série entière réelle de rayon de convergence R de somme S. Alors $S \in \mathcal{C}^\infty(]-R,R[,\mathbb{R})$ et $\forall t \in]-R,R[$,

$$S^{(k)}(t) = \sum_{n \geqslant k} \frac{n!}{(n-k)!} a_n t^{n-k}$$

Proposition : coefficients d'une série entière : Soit $\sum a_n t^n$ une série entière réelle de rayon de convergence R et de somme f. Alors

$$a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$$

et ainsi

$$\forall t \in]-R,R[, \ f(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} t^n$$

5 Fonctions développables en séries entières

Définition : fonction développable en série entière en 0 **:** On dit que f est développable en série entière au point 0 s'il existe $R > 0$ et une série entière $\sum a_n z^n$ ($(a_n)_n \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$) tels que :

- f est définie sur $\mathcal{D}(0,R)$ et
- $\forall z \in \mathcal{D}(0,R), \ f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$.

Définition : fonction développable en série entière en $t_0 \in \mathbb{R}$ **:** Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et $t_0 \in I$ avec I un intervalle de $\mathbb{R}$. Soit $g : \begin{cases} J \to \mathbb{R} \\ u \mapsto g(u) = f(t_0 + u) \end{cases}$ avec J l'intervalle I translaté de $-t_0$.

f est développable en série entière en t_0 si g est développable en série entière en 0.

Ou encore, s'il existe $(a_n)_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et $R > 0$ tels que $\forall t \in]t_0 - R, R + t_0[, \ f(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (t-t_0)^n$.

Propriétés : Soit f une fonction développable en série entière en 0 et de rayon de convergence R :

1. il y a unicité du développement en série entière ;
2. si f est paire (resp. impaire), il n'y aura que des monômes d'ordre pair (resp. impair) dans le développement en série entière ;
3. si g est aussi une fonction développable en série entière en 0 et qui admet R' comme rayon de convergence, $f+g$ et $f \times g$ sont développable en série entière en 0 de rayon de convergence $\geqslant Min(R,R')$ avec

$$(f+g)(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} (a_n + b_n) t^n \qquad (f \times g)(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^{n} (a_{n-k} b_k) t^n$$

αf admet aussi un développement en série entière de rayon de convergence R si $\alpha \neq 0$ avec

$$(\alpha f)(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} (\alpha a_n) t^n$$

4. f' est développable en série entière et admet R comme rayon de convergence et

$$\forall t \in]-R, R[,\ f'(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} n a_n t^{n-1}$$

5. si F est une primitive de f, F est aussi développable en série entière de même rayon de convergence R et

$$\forall t \in]-R, R[,\ F(t) = F(0) + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \frac{t^{n+1}}{n+1}$$

6. $f \in \mathcal{C}^\infty(]-R, R[, \mathbb{R})$.

Développements en séries entières usuels :
De rayon de convergence $R = +\infty$, $\forall z \in \mathbb{C},\ \forall t \in \mathbb{R}$:

$$\exp(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$$

$$\cos t = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{t^{2n}}{(2n)!} \qquad \sin t = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{t^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$\operatorname{ch} t = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^{2n}}{(2n)!} \qquad \operatorname{sh} t = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

De rayon de convergence $R = 1$, $\forall t \in]-1, 1[$:

$$\frac{1}{1-t} = \sum_{n=0}^{+\infty} t^n \qquad \frac{1}{1+t} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n t^n$$

$$-\ln(1-t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{t^n}{n} \qquad \ln(1+t) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{t^n}{n}$$

$$\operatorname{Argth} t = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^{2n+1}}{2n+1} \qquad \operatorname{Arctan} t \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{t^{2n+1}}{2n+1}$$

De rayon de convergence $R = 1$, $\forall t \in]-1, 1[$, $\alpha \in \mathbb{R}$:

$$(1+t)^\alpha = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!} t^n$$

$$\operatorname{Arcsin} t = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1 \times 3 \times \ldots \times (2n-1)}{2 \times 4 \times \ldots \times 2n} \frac{t^{2n+1}}{(2n+1)} \qquad \operatorname{Argth} t = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{1 \times 3 \times \ldots \times (2n-1)}{2 \times 4 \times \ldots \times 2n} \frac{t^{2n+1}}{(2n+1)}$$