Sup Mathématiques

3 Juillet 2011

Table des matières

1 Pour commencer

1.1 Introduction

Algèbre élémentaire : Soit $n \in \mathbb{N}$,

- $\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$
- $\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
- $\sum_{k=0}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$

Somme des termes d'une suite géometrique : Soit $n \in \mathbb{N}$ et $q \in \mathbb{C}$.
$S_n = \sum_{k=0}^{n} q^k = 1 + q + q^2 + \ldots + q^n$.
Si $q \neq 1$, alors on a : $S_n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$.

Formule de Pascal : Soit $n \in \mathbb{N}^\star$ et $k \in [\![1, n]\!]$.
On a $\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k}$.

Formule du binôme de Newton : Soit $n \in \mathbb{N}$, soit $a, b \in \mathbb{C}$.
On a $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$.

Identité remarquable : $\forall n \in \mathbb{N}^\star, \forall a, b \in \mathbb{C}$,
$a^n - b^n = (a-b)\left(a^{n-1} + a^{n-2}b + \ldots + ab^{n-2} + b^{n-1}\right)$

Formules trigonométriques :

X	$x + \frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2} - x$	$x + \pi$	$\pi - x$
$\sin X$	$\cos x$	$\cos x$	$-\sin x$	$\sin x$
$\cos X$	$-\sin x$	$\sin x$	$-\cos x$	$-\cos x$
$\tan X$	$-\mathrm{cotan} x$	$\mathrm{cotan} x$	$\tan x$	$-\tan x$
$\mathrm{cotan} X$	$-\tan x$	$\tan x$	$\mathrm{cotan} x$	$-\mathrm{cotan} x$

Théorème important : Soit $x, y \in \mathbb{R}$ tels que $x^2 + y^2 = 1$,
Alors, il existe $\theta \in \mathbb{R}$, unique à 2π près tel que $\begin{cases} x = \cos\theta \\ \text{et } y = \sin y \end{cases}$

1.2 Complexes

Propriétés des parties réelles et imaginaires : Soit $z \in \mathbb{C}$.
On a $Re(z) = \dfrac{z + \overline{z}}{2}$ et $Im(z) = \dfrac{z - \overline{z}}{2}$.

Double inégalité triangulaire : Soit $z, z' \in \mathbb{C}$. On a $\Big||z| - |z'|\Big| \leq |z + z'| \leq |z| + |z'|$.

Propriétés :

1. $\forall \theta \in \mathbb{R}$, $e^{i\theta} \neq 0$.
2. $\theta \in \mathbb{R}$, $\overline{e^{i\theta}} = e^{-i\theta} = \dfrac{1}{e^{i\theta}}$.
3. $\forall \theta, \theta' \in \mathbb{R}$, $e^{i\theta} \times e^{i\theta'} = e^{i(\theta+\theta')}$.
4. Formule d'Euler : $\cos\theta = \dfrac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$ et $\sin\theta = \dfrac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$.
5. Formule de Moivre : $\forall \theta \in \mathbb{R}$, $\forall n \in \mathbb{Z}$, $(e^{i\theta})^n = e^{in\theta}$.
6. Mise en facteur de l'arc moitié : soit $\theta \in \mathbb{R}$, $1 + e^{i\theta} = 2 \cdot \cos\dfrac{\theta}{2} \cdot e^{i\frac{\theta}{2}}$ et $1 - e^{i\theta} = -2i \cdot \sin\dfrac{\theta}{2} \cdot e^{i\frac{\theta}{2}}$.
7. Pour $\theta \not\equiv \pi[2\pi]$, on pose $t = \tan\dfrac{\theta}{2}$ et on a : $e^{i\theta} = \dfrac{1+it}{1+t^2}$.

Racine n-ième d'un complexe Soit $a \in \mathbb{C}^*$ et $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$: on écrit a sous forme trigonométrique :
$a = r \cdot e^{i\alpha}$ où $r > 0$ et $\alpha \in \mathbb{R}$. Alors a admet n racines n-ième données par :
$z_k = \sqrt[n]{r} \cdot e^{i\frac{\alpha + 2k\pi}{n}}$, $k \in [\![0, n-1]\!]$.

2 Analyse

2.1 Fonctions usuelles

Théorème de la bijection : Soit I un intervalle et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction. On note $J = f(I)$.
On suppose :

1. f est continue sur I ;
2. f est strictement monotone sur I.

Alors :
- f réalise une bijection de l'intervalle I sur l'intervalle J ;
- sa bijection réciproque, $f^{-1} : J \to I$, est une fonction continue strictement monotone de même sens que f ;
- la courbe représentative de f^{-1} est la symétrique de celle de f par rapport à la première bissectrice.

Théorème de dérivation de la réciproque : Soit I un intervalle, $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction et $x_0 \in I$.
On suppose :

1. f est continue et strictement monotone sur I ;
2. f est dérivable en x_0 et $f'(x_0) \neq 0$.

Alors :
- On sait déjà que f réalise une bijection de I sur l'intervalle $J = f(I)$;
- de plus, la fonction $f^{-1} : J \to I$ est dérivable au point $y_0 = f(x_0)$ avec

$$\left(f^{-1}\right)'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(y_0)\right)}$$

Croissances comparées :
- En $+\infty$, $\forall \alpha, \beta > 0$ on a :
  1. $\dfrac{e^x}{x^\alpha} \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$
  2. $\dfrac{e^x}{(\ln x)^\beta} \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$
  3. $\dfrac{x^\alpha}{(\ln x)^\beta} \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$
- En 0^+, $\forall \alpha, \beta > 0$, $x^\alpha \left(|\ln x|\right)^\beta \underset{x \to 0^+}{\longrightarrow} 0$

Formules remarquables (circulaires) :

1. $\forall x \in [-1, 1]$, $\text{Arccos}(x) + \text{Arcsin}(x) = \dfrac{\pi}{2}$
2. $\forall x \in [-1, 1]$, $\text{Arccos}(x) + \text{Arccos}(-x) = \pi$
3. $\forall x > 0$, $\text{Arctan}(x) + \text{Arctan}\left(\dfrac{1}{x}\right) = \dfrac{\pi}{2}$
4. $\forall x < 0$, $\text{Arctan}(x) + \text{Arctan}\left(\dfrac{1}{x}\right) = -\dfrac{\pi}{2}$

Formules remarquables (hyperboliques) :

1. $\forall x \in \mathbb{R}, \quad \begin{array}{l} \mathrm{ch}(x) + \mathrm{sh}(x) = e^x \\ \mathrm{ch}(x) - \mathrm{sh}(x) = e^{-x} \end{array}$
2. $\forall x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{ch}^2(x) - \mathrm{sh}^2(x) = 1$

Expressions logarithmiques :

1. $\forall x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{Argsh}(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$
2. $\forall x \in [1, +\infty[$, $\mathrm{Argch}(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right)$
3. $\forall x \in]-1, 1[$, $\mathrm{Argth}(x) = \dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$

Ensemble de définition, dérivées :

Arcsin	$[1, 1]$	$]-1, 1[$	$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
Arccos	$[1, 1]$	$]-1, 1[$	$-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
Arctan	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\dfrac{1}{1+x^2}$
sh	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	ch
ch	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	sh
th	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\dfrac{1}{\mathrm{ch}^2} = 1 - \mathrm{th}^2$
Argsh	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$
Argch	$[1, +\infty[$	$]1, +\infty[$	$\dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$
Argth	$]-1, 1[$	$]-1, 1[$	$\dfrac{1}{1-x^2}$

2.2 Équations différentielles

Dans toute cette partie, I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$ et $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Équation homogène résolue : On appelle équation différentielle d'ordre 1 homogène résolue un équation différentielle du type $(H) : y' + a(x) \cdot y = 0$ où $a : I \to \mathbb{K}$ est une fonction continue sur I.

Solution d'une équation homogène résolue : Soit (H) une équation différentielle d'ordre 1 homogène résolue.
$(H) : y' + a(x) \cdot y = 0$ où $a : I \to \mathbb{K}$ est une fonction continue sur I.
Les solutions de (H) sont de la forme :
$\forall x \in I,\ y(x) = \lambda \cdot e^{-\varphi}$ où $\lambda \in \mathbb{K}$ et φ primitive de a sur I.

Problème de Cauchy : Soit (E) une équation différentielle linéaire d'ordre 1 complète résolue.
$(E) : y' + a(x) \cdot y = b(x)$ avec $a : I \to \mathbb{K}$ et $b : I \to \mathbb{K}$ 2 fonctions continues sur I.
Soit $x_0 \in I$ et $z_0 \in \mathbb{K}$.
Le problème de Cauchy $\begin{cases} y' + a(x) \cdot y = b(x) \\ y(x_0) = z_0 \end{cases}$ admet une unique solution.

Équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients constants : On appelle équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients constants une équation différentielle du type :
$a \cdot y'' + b \cdot y' + c \cdot y = f(x)$
avec $a, b, c \in \mathbb{K}$ 3 constantes, $a \neq 0$ et $f : I \to \mathbb{K}$ une fonction continue sur I.

Résolution équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients constants homogène : $(H) : a \cdot y'' + b \cdot y' + c \cdot y = 0$ avec $a, b, c \in \mathbb{K}$, $a \neq 0$.
Equation caractéristique : $(\star) : a \cdot \lambda^2 + b \cdot \lambda + c = 0$ de discriminant $\Delta = b^2 - 4 \cdot a \cdot c \in \mathbb{K}$.

Cas où $\mathbb{K} = \mathbb{C}$:

	Racines de $(\star)$	base $\{y_1, y_2\}$	solutions de (H)
$\Delta \neq 0$	$\lambda_1 \neq \lambda_2 \in \mathbb{C}$	$x \mapsto e^{\lambda_1 x}$ et $x \mapsto e^{\lambda_2 x}$	$x \mapsto C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}$
$\Delta = 0$	$\lambda_1 \in \mathbb{C}$ racine double	$x \mapsto e^{\lambda_1 x}$ et $x \mapsto x e^{\lambda_1 x}$	$x \mapsto C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 x e^{\lambda_1 x}$

Avec C_1, C_2 constantes $\in \mathbb{C}$

Cas où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$:

	Racines de $(\star)$	base $\{y_1, y_2\}$	solutions de (H)
$\Delta > 0$	$\lambda_1 \neq \lambda_2 \in \mathbb{C}$	$x \mapsto e^{\lambda_1 x}$ et $x \mapsto e^{\lambda_2 x}$	$x \mapsto C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}$
$\Delta = 0$	$\lambda_1 \in \mathbb{C}$ racine double	$x \mapsto e^{\lambda_1 x}$ et $x \mapsto x e^{\lambda_1 x}$	$x \mapsto C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 x e^{\lambda_1 x}$
$\Delta < 0$	$\alpha + i\beta$ et $\alpha - i\beta \in \mathbb{C}$ $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\beta \neq 0$	$x \mapsto \cos(\beta x) e^{\alpha x}$ *et* $x \mapsto \sin(\beta x) e^{\alpha x}$	$x \mapsto C_1 \cos(\beta x) e^{\alpha x}$ $+ C_2 \sin(\beta x) e^{\alpha x}$

Avec C_1, C_2 constantes $\in \mathbb{R}$

Résolution de l'équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients constants complète : $(E) : a \cdot y'' + b \cdot y' + c \cdot y = f(x)$
avec $a, b, c \in \mathbb{K}$ 3 constantes, $a \neq 0$ et $f : I \to \mathbb{K}$ une fonction continue sur I.
Les solutions de (E) sur I sont de la forme $y = y_0 + z$
où :
- y_0 solution particulière de (E) ;
- z solution de l'équation homogène associée.

2.3 Courbes paramétrées

Dans toute cette partie, I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$.

Définition d'un arc paramétré : On appelle arc paramétré (ou courbe paramétrée) un couple (I, f) où :

- I un intervalle de $\mathbb{R}$;
- f une fonction définie sur I à valeur dans $\mathbb{R}^2$ et de classe $\mathcal{C}^1$ sur I.

$f(I)$, image de l'intervalle I par f, est appelée support de l'arc paramétré (I, f) et noté Γ. Par rabus de notation, on note $\Gamma = (I, f)$.

Point régulier - point stationnaire : Soit $t_0 \in I$, le point mobile $M(t_0)$ est qualifié de régulier si le vecteur vitesse $f'(t_0)$ est non nul : $f'(t_0) \neq (0, 0)$. Le point mobile $M(t_0)$ est dit stationnaire si $f'(t_0) = (0, 0)$.

Plan d'étude d'un arc paramétré :

1. Domaine de définition, domaine d'étude ;
2. Tableau de variations de x et y ;
3. Étude des points remarquables (points singuliers, points à tangentes verticales et horizontale) ;
4. Branches infinies ;
5. Tracé de Γ ;
6. Remarques issues du tracé : points doubles.

Idem avec les courbes paramétrées polaires.

2.4 Ensembles et application

Inclusion : Soit A et B 2 ensembles.
On dit que A est inclus dans B (noté $A \subset B$) lorsque : $\forall x \in A, x \in B$.
Dans ce cas, on dit que A est une partie de B et que B contient A.

Égalité de deux ensembles : $A = B$ ssi $(A \subset B$ et $B \subset A)$

Produit cartésien : Soit E et F 2 ensembles.
On appelle produit cartésien de E et F noté $E \times F$, l'ensemble formé par les couples (x, y) avec $x \in E$ et $y \in F$:

$$E \times F = \{(x, y) | x \in E \text{ et } y \in F\}$$

Opérations sur les ensembles : Soit A, B, E 3 ensembles.
- Intersection : $A \cap B = \{x | x \in A \text{ et } x \in B\}$;
- Union : $A \cup B = \{x | x \in A \text{ ou } x \in B\}$;
- Complémentaire : $A \subset E$. $\complement_E A = \{x \in E | x \notin A\}$;
- Différence de deux ensembles : $A \setminus B = \{x \in A | x \notin B\}$;
- Parties d'un ensemble : on note $\mathscr{P}(E)$ l'ensemble des parties formé par les parties de E. $\mathscr{P}(E) = \{A \text{ tel que } A \subset E\}$.

Propriétés :
- $A \cup A = A \qquad A \cap A = A \qquad A \cup \varnothing = A \qquad A \cap \varnothing = \varnothing$;
- Commutativité : $A \cup B = B \cup A \qquad A \cap B = B \cap A$;
- Associativité : $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C \qquad A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$;
- Distributivité de $\cap$ par rapport à $\cup$ et de $\cup$ par rapport à $\cap$:
  - $A \cup (B \cap c) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
  - $A \cap (B \cup c) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
- Lois de De Morgan : Soit A et B 2 parties de E.
  $\complement_E(A \cup B) = \complement_E A \cap \complement_E B \qquad \complement_E(A \cap B) = \complement_E A \cup \complement_E B$.

Fonctions, applications : Soit E et F deux ensembles.
On appelle fonction définie sur E à valeur dans F toute relation f de E vers F telle que tout élément x de E soit mis en relation par f avec un unique élément, noté $f(x)$, de F.
Cette fonction f, appelé aussi application, se note : $f : \begin{array}{ccc} E & \to & F \\ x & \mapsto & f(x) \end{array}$

Image directe, image réciproque : Soit $f : E \to F$ une fonction.
- Étant donnée A une partie de E, on appelle image directe de A par f l'ensemble $f(A) = \{f(x) | x \in A\}$;
- Étant donnée B une partie de F, on appelle image réciproque de A par f l'ensemble $f^{-1}(A) = \{x \in E | f(x) \in B\}$.

Propriétés : Soit $f : E \to F$ une fonction, soit A et A' deux parties de E, soit B et B' deux parties de F.
- Si $A \subset A'$, alors $f(A) \subset f(A')$.
  Si $B \subset B'$, alors $f^{-1}(B) \subset f^{-1}(B')$.
- $f\left(f^{-1}(B)\right) \subset B$.
- $A \subset f^{-1}(f(A))$.

- $f(A \cup A') = f(A) \cup f(A')$ $\qquad f(A \cap A') \subset (f(A) \cap f(A'))$

Injection, surjection, bijection : Soit $f : \begin{array}{ccc} E & \to & F \\ x & \mapsto & f(x) \end{array}$ une fonction de E vers F.

- On dit que f est injective sur E lorsque : $\forall x, x' \in E, f(x) = f(x') \Rightarrow x = x'$;
- On dit que f est surjective de E sur F lorsque : $\forall y \in F, \exists x \in E$ tel que $y = f(x)$;
- On dit que f est une bijection de E sur F lorsque : $\forall y \in F, \exists ! x \in E$ tel que $y = f(x)$.

Propriété : Soit $f : E \to F$ une fonction.
S'il existe une fonction $g : F \to E$ telle que $g \circ f = Id_E$ et $f \circ g = Id_F$,
alors f bijective de E sur f et $f^{-1} = g$.

Involution : Soif $f : E \to E$ tel que $f \circ f = Id_E$,
alors f bijective de E sur E et $f^{-1} = f$.

Relation : Soit E un ensemble.
On appelle relation sur E (ou relation binaire sur E) une partie Γ de $E \times E$.
Pour signifier $(x, y) \in E \times E$, on note "$x \mathscr{R} y$" qui se lit "x est mis en relation avec y par $\mathscr{R}$".
Par abus, on dit que $\mathscr{R}$ est une relation.

Qualification des relations : Soit E un ensemble et $\mathscr{R}$ une relation sur E. On dit que :

- $\mathscr{R}$ est réflexive lorsque : $\forall x \in E$, $x \mathscr{R} x$;
- $\mathscr{R}$ est symétrique lorsque : $\forall x, y \in E$, $x \mathscr{R} y \Rightarrow y \mathscr{R} x$;
- $\mathscr{R}$ est antisymétrique lorsque : $\forall x, y \in E$, $x \mathscr{R} y$ et $y \mathscr{R} x \Rightarrow x = y$;
- $\mathscr{R}$ est transitive lorsque : $\forall x, y, z \in E$, $x \mathscr{R} y$ et $y \mathscr{R} z \Rightarrow x \mathscr{R} z$.

Relation d'ordre : Soit E un ensemble et $\mathscr{R}$ une relation sur E.
On dit que $\mathscr{R}$ est une relation d'ordre E lorsque $\mathscr{R}$ est réflexive, antisymétrique et transitive.

Relation d'ordre totale - partielle : Soit E un ensemble et $\mathscr{R}$ une relation d'ordre sur E.
On dit que :

- $\mathscr{R}$ est totale lorsque $\forall x, y \in E$, $x \mathscr{R} y$ ou $y \mathscr{R} x$;
- $\mathscr{R}$ est partielle lorsque $\mathscr{R}$ n'est pas totale.

Majorant - minorant : Soit E un ensemble et $\mathscr{R}$ une relation d'ordre sur E et A une partie de E : $A \subset E$.

- M est un majorant de A dans E lorsque :
  - $M \in E$
  - et $\forall x \in A$, $x \mathscr{R} M$
- m est un minorant de A dans E lorsque :
  - $m \in E$
  - et $\forall x \in A$, $m \mathscr{R} x$

Plus grand élément - plus petit élément : Soit E un ensemble et $\mathscr{R}$ une relation d'ordre sur E et A une partie de E : $A \subset E$.

- M est plus grand élément de A dans E lorsque :
  - $M \in A$
  - et $\forall x \in A$, $x \mathscr{R} M$
- m est plus petit élément de A dans E lorsque :

– $m \in A$
– et $\forall x \in A$, $m \mathscr{R} x$

Borne supérieure - borne inférieure : Soit E un ensemble et $\mathscr{R}$ une relation d'ordre sur E et A une partie de E : $A \subset E$.

- S est borne supérieure de A dans E lorsque S est le plus petit des majorants de A dans E i.e. :
  – $\forall x \in A$, $x \mathscr{R} S$
  – et $\forall M$ majorant de A dans E, $S \mathscr{R} M$.
- I est borne inférieure de A dans E lorsque S est le plus grand des minorants de A dans E i.e. :
  – $\forall x \in A$, $I \mathscr{R} x$
  – et $\forall m$ minorant de A dans E, $m \mathscr{R} I$.

Existence et unicité des majorants, minorants, plus grand élément, plus petit élément, borne supérieure, borne inférieure :

- Le majorant s'il existe, n'est pas forcément unique.
  Le minorant s'il existe, n'est pas forcément unique.
- Le plus grand élément, s'il existe, est unique.
  Le plus petit élément, s'il existe, est unique.
- La borne supérieure de A, si elle existe, est unique et notée $Sup(A)$.
  La borne inférieure de A, si elle existe, est unique et notée $Inf(A)$.
- Si le plus grand élément de A existe, alors la borne supérieure de A existe et $Sup(A) = Max(A)$.
  Si le plus petit élément de A existe, alors la borne inférieure de A existe et $Inf(A) = Min(A)$.

Caractérisation des bornes supérieures et inférieures dans le cas $E = \mathbb{R}$ et $\mathscr{R} = \leqslant$:
Soit A une partie de $\mathbb{R}$.

- S borne supérieure de A ssi $\left| \begin{array}{l} \forall x \in A,\ x \leqslant S, \\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists x \in A \text{ tel que } S - \varepsilon < x. \end{array} \right.$
- I borne inférieure de A ssi $\left| \begin{array}{l} \forall x \in A,\ I \leqslant x, \\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists x \in A \text{ tel que } x < I + \varepsilon. \end{array} \right.$

Caractérisation par les suites des bornes supérieures et inférieures dans le cas $E = \mathbb{R}$ et $\mathscr{R} = \leqslant$: Soit A une partie de $\mathbb{R}$.

- S borne supérieure de A ssi $\left| \begin{array}{l} \forall x \in A,\ x \leqslant S, \\ \text{il existe une suite } (u_n)_n \text{ d'éléments de } A \text{ qui converge vers } S. \end{array} \right.$
- I borne inférieure de A ssi $\left| \begin{array}{l} \forall x \in A,\ I \leqslant x, \\ \text{il existe une suite } (u_n)_n \text{ d'éléments de } A \text{ qui converge vers } I. \end{array} \right.$

Cas particulier de $\mathbb{N}$:

- Théorème 1 : Toute partie non vide de $\mathbb{N}$ admet un plus petit élément dans $\mathbb{N}$.
- Théorème 2 : Toute partie non vide majorée de $\mathbb{N}$ admet un plus grand élément dans $\mathbb{N}$.

2.5 Corps des nombres réels

Structure : Sur $\mathbb{R}$, on dispose de 2 lois : $+ : \begin{cases} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \\ (x,y) \mapsto x+y \end{cases}$ et $\times : \begin{cases} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \\ (x,y) \mapsto x \times y \end{cases}$.

L'addition vérifie : 1. $+$ est une l.c.i. sur $\mathbb{R}$: $\forall x, y \in \mathbb{R}$, on a $x+y \in \mathbb{R}$.

2. $+$ est associative : $\forall x, y, z \in \mathbb{R}$, $(x+y)+z = x+(y+z)$.
3. 0 est élément neutre pour $+$: $\forall x \in \mathbb{R}$, $x+0 = 0+x = x$.
4. Tout réel admet un symétrique dans $\mathbb{R}$ pour $+$: Soit $x \in \mathbb{R}$, prenons $y = -x$. On a $x+y = y+x = 0$. On dit que $-x$ est le symétrique de x dans $\mathbb{R}$ pour $+$.
5. $+$ est commutative : $\forall x, y \in \mathbb{R}$, $x+y = y+x$.

Pour résumer ces 5 propriétés, on dit que $(\mathbb{R}, +)$ a une structure de groupe commutatif.

La multiplication $\times$ vérifie : 1. $\times$ est une l.c.i. sur $\mathbb{R}$: $\forall x, y \in \mathbb{R}$, on a $x \times y \in \mathbb{R}$.

2. $\times$ est associative : $\forall x, y, z \in \mathbb{R}$, $(x \times y) \times z = x \times (y \times z)$.
3. 1 est élément neutre pour $\times$: $\forall x \in \mathbb{R}$, $x \times 1 = 1 \times x = x$.
4. Tout réel non nul admet un symétrique dans $\mathbb{R}$ pour $\times$: Soit $x \in \mathbb{R}^*$, prenons $y = \dfrac{1}{x}$. On a $x \times y = y \times x = 1$. On dit que $\dfrac{1}{x}$ est le symétrique de x dans $\mathbb{R}$ pour $\times$.
5. $\times$ est distributive par rapport à $+$: $\forall x, y, z \in \mathbb{R}$, $x \times (y+z) = x \times y + x \times z$ et $(y+z) \times x = y \times x + z \times x$.
6. $\times$ est commutative : $\forall x, y \in \mathbb{R}$, $x \times y = y \times x$.

Pour résumer ces 11 propriétés, on dit que $(\mathbb{R}, +, \times)$ a une structure de corps.

Relation d'ordre $\leq$: Sur $\mathbb{R}$, on dispose d'une relation d'ordre totale $\leq$ qui vérifie les points suivants :

1. $\leq$ est comptaible avec l'addition :
   - $\forall a, b, c \in \mathbb{R}$, $(a \leq b \leftrightarrow a+c \leq b+c$.
   - $\forall a, b, c, d \in \mathbb{R}$, $([a \leq b \text{ et } c \leq d] \Longrightarrow a+c \leq b+d)$.
2. $\leq$ ect compatible avec la multiplication par un réel positif :
   - $\forall a, b \in \mathbb{R}, \forall c > 0$ $(a \leq b \leftrightarrow a \cdot c \leq b \cdot c)$.
   - $\forall a, b, c, d \in \mathbb{R}$, $([0 \leq a \leq b \text{ et } 0 \leq c \leq d] \Longrightarrow a \cdot c \leq b \leq d)$.
3. Passage à l'inverse : $\forall x, y \in \mathbb{R}$, $\left(0 < x \leq y \Longrightarrow \dfrac{1}{y} \leq \dfrac{1}{x}\right)$

Proposition : Propriété fondamentale de la borne Sup/Inf :
Toute partie non vide majorée de $\mathbb{R}$ admet une borne supérieure dans $\mathbb{R}$.
Toute partie non vide minorée de $\mathbb{R}$ admet une borne inférieure dans $\mathbb{R}$.

Caractérisation de la borne supérieure / inférieure à l'aide des ε : Soit A une partie de $\mathbb{R}$.

- S est borne supérieure de $A \Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} \forall x \in A, x \leq S \\ \forall \varepsilon > 0, \exists x \in A \text{ tel que } S - \varepsilon < x. \end{array} \right.$
- I est borne inférieure de $A \Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} \forall x \in A, I \leq x \\ \forall \varepsilon > 0, \exists x \in A \text{ tel que } x < I - \varepsilon. \end{array} \right.$

Théorème : $\mathbb{R}$ est archimédien : $\forall a, b > 0, \exists\, n \in \mathbb{N}$ tel que $a \cdot n > b$.

Droite numérique achevée : On appelle droite numérique achevée l'ensemble $\mathbb{R}\bigcup\{+\infty,-\infty\}$ noté $\overline{\mathbb{R}}$ où $+\infty$ et $-\infty$ sont des symboles $\neq$ régis par les lois suivantes :

1. Prolongement de l'odre : $\forall x\in\mathbb{R}$, $-\infty<x<+\infty$.
2. Prolongement de l'addition : $\forall x\in\mathbb{R}$ on a :
   $x+(+\infty)=(+\infty)+x=+\infty$; $x+(-\infty)=(-\infty)+x=-\infty$; $(+\infty)+(+\infty)=+\infty$ et $(-\infty)+(-\infty)=-\infty$.
3. Prolongement de l'addition : $\forall x\in\mathbb{R}^*$ on a :
   $x\times(+\infty)=(+\infty)\times x=\left|\begin{array}{l}+\infty \text{ si } x>0\\ -\infty \text{ si } x<0\end{array}\right.$.
   $x\times(-\infty)=(-\infty)\times x=\left|\begin{array}{l}-\infty \text{ si } x>0\\ +\infty \text{ si } x<0\end{array}\right.$.
   $(+\infty)\times(+\infty)=(+\infty)$ et $(-\infty)+(-\infty)=(+\infty)$.
   $(+\infty)\times(-\infty)=-\infty$ et $\dfrac{1}{+\infty}=\dfrac{1}{-\infty}=0$.

Valeur absolue : On appelle valeur absolue la fonction $|.|:\left|\begin{array}{l}\mathbb{R}\to\mathbb{R}\\ x\mapsto\left|\begin{array}{l}x \text{ si } x\geq 0\\ -x \text{ si } x<0\end{array}\right.\end{array}\right.$.

1. $\forall x\in\mathbb{R}$, $\sqrt{x^2}=|x|$, $|x|\geq 0$, $|x|=0\leftrightarrow x=0$.
2. La fonction $|.|$ est paire, continue sur $\mathbb{R}$, dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et $\forall x\in\mathbb{R}^*$, $|.|'(x)=\left|\begin{array}{l}1 \text{ si } x>0\\ -1 \text{ si } x<0\end{array}\right.$.
3. $\forall y\in\mathbb{R}^*$, $|x\cdot y|=|x|\cdot|y|$, $|-x|=|x|$, $\left|\dfrac{1}{x}\right|=\dfrac{1}{|x|}$ (pour $x\neq 0$).

Distance : Soit $x,y\in\mathbb{R}$. On appelle distance de x à y le réel positif $|x-y|$.

Double inégalité triangulaire : $\forall x,y\in\mathbb{R}$, on a :
$\Big||x|-|y|\Big|\leq|x+y|\leq|x|+|y|$.

Valeur approché d'un réel à α près, ($\alpha>0$ fixé) : $\forall x\in\mathbb{R}$, $\exists!\in\mathbb{Z}$, tel que $p\cdot\alpha\leq x\leq(p+1)\cdot\alpha$.

Appliquons le résultat précédent avec $\alpha=1$ et $\alpha=\dfrac{1}{10^n}$, $n\in\mathbb{N}$:

- $\forall x\in\mathbb{R}$, $\exists!p\in\mathbb{Z}$ tel que $p\leq x\leq p+1$. Cet entier est appelé partie entière de x et on le note $E(x)$.
  $E(x)$ est le plus grand entier relatif inférieur ou égal à x.
  $\forall x\in\mathbb{R}$, $E(x)\leq x<E(x)+1$.
- $\forall x\in\mathbb{R},\exists!p\in\mathbb{Z}$ tel que $\dfrac{p}{10^n}\leq x\leq\dfrac{p+1}{10^n}$.

Intervalle de $\mathbb{R}$: Soit $x,y\in\overline{\mathbb{R}}$ et on note :
$[x,y]=\{z\in\mathbb{R}|x\leq z\leq y\}$
$]x,y[=\{z\in\mathbb{R}|x<z<y\}$
Une partie I non vide de $\mathbb{R}$ est appelé un intervalle lorsque :
$\forall x,y\mathbb{I}$ avec $x\leq y$, on a $[x,y]\subset I$.

Théorème : Classification des intervalles de $\mathbb{R}$: Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, alors I est de la forme de l'une des 9 formes suivantes :

- $[a,b]$ avec $a,b \in \mathbb{R}$, $a \leq b$.
- $]a,b[$ avec $a,b \in \mathbb{R}$, $a < b$.
- $]a,b]$ avec $a,b \in \mathbb{R}$, $a < b$.
- $[a,b[$ avec $a,b \in \mathbb{R}$, $a < b$.
- $[a,+\infty[$ avec $a \in \mathbb{R}$.
- $]a,+\infty[$ avec $a \in \mathbb{R}$.
- $]-\infty,b]$ avec $b \in \mathbb{R}$.
- $]-\infty,b[$ avec $b \in \mathbb{R}$.
- $]-\infty,+\infty[$.

Théorème : Densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$: Soit $x,y \in \mathbb{R}$ tel que $x < y$, alors il existe $q \in \mathbb{Q}$ tel que $x < q < y$.
« Entre 2 réels différents, il est toujours possible de trouver un rationnel. »
Conséquences :

1. Tout intervalle de $\mathbb{R}$ non réduit à un point contient forcément au moins un rationel.
2. L'ensemble des irrationnels, i.e. $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ est aussi dense dans $\mathbb{R}$.
3. Étant donné un réel x, on peut trouver une suite de rationnels $(q_n)_n$ qui converge vers x.

2.6 Fonctions numériques d'une variable réelle

Rappel : $\mathcal{F}(I,\mathbb{R}) = \mathbb{R}^I$ désigne l'ensemble des fonctions définies sur I à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Structure :
- $(\mathbb{R}^I, +, \times)$ est un anneau commutatif ;
- $(\mathbb{R}^I, +, \cdot)$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

Rappel : $\forall a, b \in \mathbb{R}$, $max(a,b) = \dfrac{a+b+|a-b|}{2}$ et $min(a,b) = \dfrac{a+b-|a-b|}{2}$.

Fonctions f^+ - f^- : Soit $f \in \mathbb{R}^I$, on définit :
$f^+ = max(f, \mathcal{O})$ et $f^- = max(-f, \mathcal{O})$.
$f^+ = \dfrac{f+|f|}{2}$ et $f^- = \dfrac{-f+|f|}{2}$.

Composée de fonctions croissantes : Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction croissante et $g : J \to \mathbb{R}$ une fonction croissante avec $f(I) \subset J$.
Alors la fonction $g \circ f : I \to \mathbb{R}$ est croissante.

Stricte monotonie et injectivité : Si $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction strictement monotone, alors f est injective sur I.

Fonction lipschitzienne : Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction.
On dit que f est lipschitzienne sur I lorsque : $\exists k \geqslant 0$ tel que $\forall x, y \in I$, $|f(x) - f(y)| \leqslant k|x - y|$.
Dans ce cas, k est appelé constante de lipschitziaité et on dit que f est k-lipschitzienne.
Le caractère Lipschtzien est stable par combinaison linéaire.

Composée de fonctions lipschitziennes : Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et $g : J \to \mathbb{R}$ 2 fonctions lipschitziennes avec $f(I) \subset J$.
On a $g \circ f : I \to \mathbb{R}$ est lipschitzienne sur I.

Limite finie d'une fonction en un point :

$$f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} l \text{ ssi } \forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in I, (|x-a| \leqslant \alpha \Rightarrow |f(x) - l| \leqslant \varepsilon)$$

Limite finie en une borne infinie :

$$f(x) \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} l \text{ ssi } \forall \varepsilon > 0, \exists A > 0, \forall x \in I, (x \geqslant A \Rightarrow |f(x) - l| \leqslant \varepsilon)$$

Limite infinie d'une fonction en un point :

$$f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} +\infty \text{ ssi } \forall A > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in I, (|x-a| \leqslant \alpha \Rightarrow f(x) \geqslant A)$$

Théorème : Lien limite en un point et limite à gauche - droite :
Soit $f : I \to \mathbb{R}$ avec $a \in I$ et tel que $I \cap]a, +\infty[\neq \varnothing$ et $I \cap]-\infty, a[\neq \varnothing$.
Soit $l \in \mathbb{R}$.

$$f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} l \text{ ssi } \left[f(x) \underset{x \to a^-}{\longrightarrow} l \text{ et } f(x) \underset{x \to a^+}{\longrightarrow} l \text{ et } l = f(a) \right]$$

Théorème des limites finies par encadrement : Soit $f, g, h : I \to \mathbb{R}$ 3 fonctions.
Si :
- f admet l comme limite finie en a ;
- h admet l comme limite finie en a ;
- il existe v_1 voisinage de a tel que $\forall x \in v_1,\ f(x) \leqslant g(x) \leqslant h(x)$.

Alors :
- g admet une limite finie en a ;
- et cette limite vaut l.

Relation de négligeabilité :
Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et $a \in I$ ou borne de I.
Soit $\varphi : I \to \mathbb{R}$ une fonction telle que φ ne s'annule pas sur $I \setminus \{a\}$.
On dit que f est négligeable devant φ au voisinage de a lorsque : $\dfrac{f(x)}{\varphi(x)} \underset{x\to a}{\longrightarrow} 0$.
On note $f(x) = \underset{x\to a}{o}(\varphi(x))$ ou $f = \underset{a}{o}(\varphi)$.

Relation d'équivalence entre deux fonctions :
Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et $a \in I$ ou borne de I.
Soit $\varphi : I \to \mathbb{R}$ une fonction telle que φ ne s'annule pas sur $I \setminus \{a\}$.
On dit que f est équivalente à φ au voisinage de a lorsque : $\dfrac{f(x)}{\varphi(x)} \underset{x\to a}{\longrightarrow} 1$.
On note $f(x) \underset{x\to a}{\sim} \varphi(x)$ ou $f \underset{a}{\sim} \varphi$.

Lien équivalent - négligeabilité :
Soit f et $h : I \to \mathbb{R}$ 2 fonctions, $a \in I$ ou a une borne de I.
Soit $g : I \to \mathbb{R}$ une fonction ne s'annulant pas sur $I \setminus \{a\}$.
Si $\forall x \in I,\ f(x) = g(x) + h(x)$ avec $h(x) = \underset{x\to a}{o}(g(x))$,
Alors $f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x)$.

Propriétés des équivalents :
- On peut multiplier et diviser des équivalents.
- Attention : on ne somme pas et on ne compose pas les équivalents !

Lien équivalence - limite : Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et $a \in I$ ou borne de I.
Soit $\varphi : I \to \mathbb{R}$ une fonction telle que φ ne s'annule pas sur $I \setminus \{a\}$.

- Si φ admùet une limite $l \in \overline{\mathbb{R}}$ en a et $f(x) \underset{x\to a}{\sim} \varphi(x)$,
  alors f admet aussi l comme limite en a.
- Soit $l \in \mathbb{R}$, $l \neq 0$, on a :

$$f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} l \text{ ssi } f(x) \underset{x\to a}{\sim} l$$

Équivalents usuels :

1. Expressions polynomiales :
   Soit $n, p \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant p$, soit $a_p, a_{p+1}, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ tels que $a_p \neq 0$ et $a_n \neq 0$.
   - $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_p x^p \underset{x\to+\infty}{\sim} a_n x^n$
   - $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_p x^p \underset{x\to 0}{\sim} a_p x^p$

2. Fonctions exponentielle, logarithmique et puissance :
   $\alpha \in \mathbb{R}^\star$ fixé.
   $e^x - 1 \underset{x \to 0}{\sim} x \qquad \ln(1+x) \underset{x \to 0}{\sim} x \qquad (1+x)^\alpha - 1 \underset{x \to 0}{\sim} \alpha x$
3. Fonctions circulaires :
   $\sin x \underset{x \to 0}{\sim} x \qquad \tan x \underset{x \to 0}{\sim} x \qquad \cos x \underset{x \to 0}{\sim} 1 \qquad 1 - \cos x \underset{x \to 0}{\sim} \dfrac{x^2}{2}$
4. Fonctions trigonométriques 4 hyperboliques :
   $\operatorname{sh} x \underset{x \to 0}{\sim} x \qquad \operatorname{th} x \underset{x \to 0}{\sim} x \qquad \operatorname{ch} x \underset{x \to 0}{\sim} 1 \qquad \operatorname{ch} x - 1 \underset{x \to 0}{\sim} \dfrac{x^2}{2}$
5. Fonctions circulaires réciproques :
   $\operatorname{Arcsin} x \underset{x \to 0}{\sim} x \qquad \operatorname{Arctan} x \underset{x \to 0}{\sim} x \qquad \operatorname{Arccos} x \underset{x \to 0}{\sim} \dfrac{\pi}{2} \qquad \dfrac{\pi}{2} - \operatorname{Arccos} x \underset{x \to 0}{\sim} x$

Relation de domination :
Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et $a \in I$ ou borne de I.
Soit $\varphi : I \to \mathbb{R}$ une fonction telle que φ ne s'annule pas sur $I \setminus \{a\}$.
On dit que f est dominée par φ au voisinage pointé de a lorsque : $\dfrac{f(x)}{\varphi(x)}$ est bornée sur un voisinage pointé de a.
On note $f(x) = \underset{x \to a}{O}(\varphi(x))$ ou $f = \underset{a}{O}(\varphi)$.

2.7 Continuité

Dans toute cette partie, on considère des fonctions $f : I \to \mathbb{R}$ (i.e. f fonction numérique d'une variable réelle) avec I un ontervalle non vide de $\mathbb{R}$.

Continuité en un point : Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et $a \in I$.
On dit que f est continue au point a lorsque $f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} f(a)$.
On dit que f est continue à gauche en a lorsque $f(x) \underset{x \to a^-}{\longrightarrow} f(a)$.
On dit que f est continue à droite en a lorsque $f(x) \underset{x \to a^+}{\longrightarrow} f(a)$.
f est continue en a ssi f est continue à gauche en a et f est continue à droite en a.

Caractérisation séquentielle : Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et $a \in I$. On a :

f continue en a ssi $\left|\begin{array}{l} \text{Pour toute suite } (u_n)_n \text{ d'éléments de } I, \\ \text{Si } u_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} a \text{ alors } f(u_n) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} f(a) \end{array}\right.$

Cette caractérisation sert souvent pour mettre en évidence une discontinuité.

Continuité sur un intervalle : Soit $I =]a, b[$ un intervalle ouvert ($a, b \in \mathbb{R}$).
On dit que f est continue sur $]a, b[$ lorsque f est continue en chaque point de $]a, b[$.

Théorème des valeurs intermédiaires : Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur I. Soit $a < b \in I$.
Pour toute valeur z comprise entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe $t \in [a, b]$ tel que $z = f(t)$.

Image d'un intervalle par une fonction continue : Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et I un intervalle non vide de $\mathbb{R}$.
Si f est continue sur I, alors $f(I)$, image de I par f, est aussi un intervalle.

Image d'un segment par une fonction continue : Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a, b]$.
Alors $f([a, b])$ est un segment lui aussi.

Théorème de la bijection : Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction. On note $J = f(I)$.
On suppose :

1. f est continue sur I ;
2. f est strictement monotone sur I.

Alors :

- f réalise une bijection de l'intervalle I sur l'intervalle J ;
- sa bijection réciproque, $f^{-1} : J \to I$, est une fonction continue strictement monotone de même sens que f ;
- la courbe représentative de f^{-1} est la symétrique de celle de f par rapport à la première bissectrice.
- si de plus, f impaire sur I, alors f^{-1} impaire sur J.

Uniforme continuité : Soit $f : I \to \mathbb{R}$.
On dit que f est uniformément continue sur I lorsque :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x, y \in I, (|x - y| \leqslant \alpha \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leqslant \varepsilon)$$

Lien uniforme continuité et fonction Lipschitzienne :
Si $f : I \to \mathbb{R}$ est Lipschitzienne sur I, alors f uniforme continue sur I.

Caractérisation séquentielle de l'uniforme continuité : Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction. On a :

$$f \text{ uniformément continue sur } I \text{ ssi } \left| \begin{array}{l} \text{Pour toutes suites } (x_n)_n, (y_n)_n \text{ d'éléments de } I, \\ \text{Si } x_n - y_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \text{ alors } f(x_n) - f(y_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \end{array} \right.$$

Lien uniforme continuité et continuité : Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction.
Si f est uniformément continue sur I, alors f est continue sur I.

Théorème de Heine : Soit $I = [a, b]$ un segment et $f : I \to \mathbb{R}$.
f uniforme continue sur le segment $[a, b]$ ssi f continue sur le segment $[a, b]$.

2.8 Dérivabilité

Dans toute cette partie, on considère des fonctions $f : I \to \mathbb{R}$ (i.e. f fonction numérique d'une variable réelle) avec I un ontervalle non vide de $\mathbb{R}$.

Définition : Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction et $a \in I$.
On dit que f est dérivable en a lorsque $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ admet une limite finie quand x tend vers a.
Dans ce cas, cette limite est notée $f'(a)$ appelé nombre dérivé de f en a.

Lien dérivabilité - continuité : Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et $a \in I$.
Si f est dérivable en a, alors f continue en a.

Dérivabilité à gauche - à droite : Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction et $a \in I$.
On dit que f est dérivable à gauche en a lorsque $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ admet une limite finie quand x tend vers a^-.
On dit que f est dérivable à droite en a lorsque $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ admet une limite finie quand x tend vers a^+.
f est dérivable en a ssi f est dérivable à droite en a et f est dérivable à gauche en a et $f'_g(a) = f'_d(a)$

Dérivabilité sur un intervalle : Soit $f :]a, b[\to \mathbb{R}$ une fonction.
On dit que f est dérivable sur $]a, b[$ lorsque f est dérivable en tout de $]a, b[$.

Dérivée d'un produit de fonctions : Soit $f_1, f_2, \ldots, f_n : I \to \mathbb{R}$ n fonctions dérivables sur I.
Le produit $f_1 \times f_2 \times \ldots \times f_n$ est dérivable sur I et est :
$(f_1 \times f_2 \times \ldots \times f_n)' = f_1' \times f_2 \times \ldots \times f_n + f_1 \times f_2' \times \ldots \times f_n + \ldots + f_1 \times f_2 \times \ldots \times f_n'$
$= \displaystyle\sum_{k=1}^{n} f_1 \times f_2 \times \ldots \times f_k' \times \ldots \times f_{n-1} \times f_n$
Application à la dérivée de f^n :
Si $f :\to \mathbb{R}$ est dérivable sur I et $n \in \mathbb{N}^\star$,
alors f^n est dérivable sur I et $(f^n)' = n \times f' \times f^{n-1}$

Dérivée d'une composition :
Si :

- $f : I \to \mathbb{R}$ est dérivable sur I ;
- $g : J \to \mathbb{R}$ est dérivable sur J ;
- $f(I) \subset J$,

Alors $g \circ f : I \to \mathbb{R}$ est dérivable sur I avec $(g \circ f)' = f' \times g' \circ f$.

Dérivée de la réciproque : On considère une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ continue sur I strictement monotone sur I.
Dans ce cas, f réalise une bijection de I sur $f(I) = J$ qui est un intervalle de $\mathbb{R}$.
Soit $x_0 \in I$. On suppose f dérivable en x_0 et $f(x_0) \neq 0$.
On pose alors $y_0 \in J$ défini par $y_0 = f(x_0)$ i.e. $x_0 = f^{-1}(y_0)$.
Alors f^{-1} est dérivable en y_0 et $\left(f^{-1}\right)'(y_0) = \dfrac{1}{f'\left(f^{-1}(y_0)\right)}$

Dérivée d'ordre supérieur : Si f est n fois dérivable sur I, $f^{(n)}$ désigne la n$^{\text{e}}$ dérivée de f. En particulier, $f^{(1)} = f'$, $f^{(2)} = f''$ et par convention, $f^{(0)} = f$.

Fonction de classe $\mathcal{C}^k$: Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction. On dit que :
- f est de classe $\mathcal{C}^0$ sur I lorsque f est continue sur I ;
- f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I lorsque f est dérivable sur I ;
- f est de classe $\mathcal{C}^k$ sur I lorsque f est k-fois dérivable sur I, $k \in \mathbb{N}^\star$;
- f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur I lorsque f est dérivable sur I à tout ordre $k \in \mathbb{N}^\star$.

Formule de Leibniz : Si $f, g : I \to \mathbb{R}$ sont 2 fonctions de classe $\mathcal{C}^n$ sur I, alors $f \times g$ est de classe $\mathcal{C}^n$ sur I avec $(f \times g)^{(n)} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \times f^{(k)} \times g^{(n-k)}$.

Classe d'une fonction réciproque : On considère une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ continue sur I strictement monotone sur I.
Dans ce cas, f réalise une bijection de I sur $f(I) = J$ qui est un intervalle de $\mathbb{R}$.
Si f est $\mathcal{C}^\infty$ sur I et f' ne s'annule pas sur I, alors f^{-1} est $\mathcal{C}^\infty$ sur J.

Théorème de Rolle : Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction.
Si :
- f est continue sur $[a, b]$ et
- f est dérivable sur $]a, b[$ et
- $f(a) = f(b)$,

alors $\exists\ c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$.

Théorème des accroissements finis : Soit $f : [a, b] : I \to \mathbb{R}$ une fonction.
Si :
- f continue sur $[a, b]$ et
- f dérivable sur $]a, b[$,

alors $\exists\ c \in]a, b[$ tel que $\dfrac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$.

Conséquences du théorème des accroissements finis :

Inégalité des accroissements finis : Si :
- $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ est continue sur $[a, b]$ et
- f dérivable sur $]a, b[$ et
- $\exists\ m, M \in \mathbb{R}$ tels que $\forall x \in]a, b[$, $m \leqslant f'(x) \leqslant M$,

alors $m(b - a) \leqslant f(b) - f(a) \leqslant M(b - a)$.

Cas particulier : Si :
- $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ est continue sur $[a, b]$ et
- f dérivable sur $]a, b[$ et
- $\exists\ k \in \geqslant 0$ tel que $\forall x \in], b[$, $|f(x)| \leqslant k$

alors $|f(b) - f(a)| \leqslant k|b - a|$.

Caractérisation des fonctions lipschitziennes dérivables : Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable. Soit $k \geqslant 0$, on a :
f k-lipschitzienne sur I ssi f' est bornée sur I par k.

Théorème de prolongement de la dérivée : Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction.
Si :

- f continue sur $[a, b]$ et
- f est dérivable sur $]a, b]$ et
- f' admet une limite finie $l \in \mathbb{R}$ quand x tend vers a^+ i.e. $f'(x) \underset{x \to a^+}{\longrightarrow} l$,

alors f est dérivable (à droite) en a et $f'(a) = l = f'_d(a)$.
On a la même chose pour montrer que f est dérivable à gauche en b.

Théorème de prolongement $\mathcal{C}^1$: Si :

- f est $\mathcal{C}^1$ sur $]a, b]$ et
- f est continue sur $[a, b]$ et
- $f'(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} l$ avec $l \in \mathbb{R}$,

alors f est $\mathcal{C}^1$ sur $[a, b]$.

Plan d'étude d'une fonction f :

1. Déterminer l'ensemble de définition $\mathcal{D}_f$;
2. Faire des remarques (éventuelles) de parité, périodicité pour réduire le domaine d'étude ;
3. Ètudier la continuité, faire d'éventuels prolongement par continuité ;
4. Ètudier la dérivabilité ;
5. Faire le tableau de variations ;
6. Ètudier les éventuelles branches infinies ;
7. Tracer la courbe représentative de f : $\mathcal{C}_f$.

2.9 Fonctions convexes

Dans toute cette partie, I désigne un intervalle non vide de $\mathbb{R}$.

Fonction convexe : Une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ est dite convexe sur I lorsque :
$\forall x, y \in I$, $\forall t \in [0,1]$, $f(tx + (1-t)y) \leqslant tf(x) + (1-t)f(y)$.

Fonction concave : Une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ est dite concave sur I lorsque $-f$ est convexe sur I.

Fonction convexe et arc : Une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ est convexe sur I ssi pour tous points $M, N \in \mathcal{C}_f$ la corde $[M,N]$ est située au dessus de l'arc $\widehat{MN}$.

Partie convexe : Soit $\mathcal{E}$ une partie du plan $\mathcal{P}$. On dit que $\mathcal{E}$ est une partie convexe de $\mathcal{P}$ lorsque :
pour tous points M et $N \in \mathcal{E}$, le segment $[M,N]$ est inclus dans $\mathcal{E}$ i.e. $[M,N] \subset \mathcal{E}$.

Èpigraphe : Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction.
On appelle épigraphe de f, noté $Epi(f)$, la partie du plan $\mathcal{P}$ située au dessus de la courbe $\mathcal{C}_f$.

$$Epi(f) = \{(x,y) \in I \times \mathbb{R} | f(x) \leqslant y\}$$

Èpigraphe et fonction convexe : $f : I \to \mathbb{R}$ est convexe sur I si et seulement si $Epi(f)$ est une partie convexe de $\mathcal{P}$.

Croissance des pentes dont on a fixé une extrémité : Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction. On a : f convexe sur I
ssi $\forall P, Q, R \in \mathcal{C}_f$ d'abscisses $x < z < y$, on a pente$(PQ) \leqslant$ pente(PR),
ssi $\forall P, Q, R \in \mathcal{C}_f$ d'abscisses $x < z < y$, on a pente$(PR) \leqslant$ pente(QR),
ssi $\forall P, Q, R \in \mathcal{C}_f$ d'abscisses $x < z < y$, on a pente$(PQ) \leqslant$ pente(QR).

Caractérisation analytique : Soit $f : I \to \mathbb{R}$.

- f convexe sur I si et seulement si pour tout $a \in I$ la fonction $\left| \begin{array}{ccc} I \setminus \{a\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} \end{array} \right.$ est croissante.
- Avec f dérivable, on a : f convexe sur I si et seulement si f' croissante sur I.

Conséquences de la caractérisation analytique :

- Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction 2 fois dérivable sur I. On a :
  f convexe sur I si et seulement si f' est croissante sur I.
- Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur I.
  Alors $\mathcal{C}_f$ est située au dessus de toutes ses tangentes.

Inégalités de convexité :

- exp est convexe sur $\mathbb{R}$: $\forall x \in \mathbb{R}$, $e^x \geqslant x + 1$.
- ln est concave sur $]0, +\infty[$: $\forall x \in]0, +\infty[$, $\ln x \leqslant x - 1$.
- sin est concave sur $[0, \frac{\pi}{2}]$: $\forall x \in [0, \frac{\pi}{2}]$, $\frac{2}{\pi} x < \sin x < x$.

Généralisation : Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction convexe.
Soit $n \in \mathbb{N}^\star$ et $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ tel que $\forall i,\ \alpha_1 \geqslant 0$ et $\sum_{i=0}^{n} \alpha_i = 1$.
Soit $x_1, \ldots, x_n \in I$.
On a : $f(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_n x_n) \leqslant \alpha_1 f(x_1) + \alpha_2 f(x_2) + \ldots + \alpha_n f(x_n)$.

Comparaison de 3 moyennes : Soit $n \in \mathbb{N}^\star$ et $x_1, \ldots, x_n$ n réels strictement positifs.

- Moyenne arithmétique : $A_n = \dfrac{x_1 + \ldots + x_n}{n}$;
- Moyenne géométrique : $G_n = (x_1 \times \ldots \times x_n)^{\frac{1}{n}}$;
- Moyenne harmonique : $H_n = \dfrac{n}{\frac{1}{x_1} + \ldots + \frac{1}{x_n}}$.

On a $H_n \leqslant G_n \leqslant A_n$.

Préambule à l'inégalité de Hölder : Soit $x, y > 0$ et $pq, \in]1, +\infty[$ tels que $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$. On a :
$x^{\frac{1}{p}} y^{\frac{1}{q}} \leqslant \dfrac{x}{p} + \dfrac{y}{q}$.

Inégalité de Hödler : Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. Soit $(a_1, \ldots, a_n)$ et $(b_1, \ldots, b_n)$ des réels strictements positifs.
Soit $p, q \in]1, +\infty[$ tels que $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$. On a : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k b_k \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} {a_k}^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{k=1}^{n} {b_k}^q\right)^{\frac{1}{q}}$.

2.10 Intégration sur un segment d'une fonction à une variable réelle

Dans cette partie, a et b désignent 2 réels tels que $a < b$ ou $a \leqslant b$ selon les cas.

Subdivision : On dit que $(a_0, a_1, \ldots, a_n)$ est une subdivisionde $[a, b]$ lorsque :

$$a = a_0 < a_1 < \ldots < a_n = b$$

Une subdivision $(c_0, c_1, \ldots, c_p)$ de $[a, b]$ est dite plus fine que $(a_0, \ldots, a_n)$ lorsque :

$$\{a_i\}_{i=0..n} \subset \{c_j\}_{j=0..p}$$

Fonction en escalier : Soit $e : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction.
e est dite en escalier associée à la subdivision $(a_i)_{i=0..n}$ de $[a, b]$ lorsque $\forall i$ $[\![0, n-1]\!]$, $\forall x \in]a_i, a_{i+1}$, $e(x) = \lambda_i$ (constante réelle).

Structure : $Esc\left([a, b], \mathbb{R}\right)$ désigne l'ensemble des fonctions en escalier définies sur $[a, b]$ à valeur dans $\mathbb{R}$.

- $\left(Esc\left([a, b], \mathbb{R}\right), +, \cdot\right)$ est un sous espace vectorielle de $\left(\mathcal{F}\left([a, b], \mathbb{R}\right), +, \cdot\right)$.
- $\left(Esc\left([a, b], \mathbb{R}\right), +, \times\right)$ est un sous anneau de $\left(\mathcal{F}\left([a, b], \mathbb{R}\right), +, \times\right)$.

Fonction continue par morceaux : Une fonction $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ est dite continue par morceaux sur $[a, b]$ lorsqu'il existe une subdivision de $[a, b]$, $a = a_0 < a_1 < \ldots < a_n = b$, telle que :

- $\forall i \in [\![0, n-1]\!]$, f continue sur $]a_i, z_{i+1}[$ et
- $\forall i \in [\![0, n-1]\!]$, $f(x)$ admet une limite quand x tend vers ${a_i}^+$ et
- $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $f(x)$ admet une limite quand x tend vers ${a_i}^-$.

Structure : $\mathcal{C}pm\left([a, b], \mathbb{R}\right)$ désigne l'ensemble des fonctions continues par morceaux définies sur $[a, b]$ à valeur dans $\mathbb{R}$.

- $\left(\mathcal{C}pm\left([a, b], \mathbb{R}\right), +, \cdot\right)$ est un sous espace vectorielle de $\left(\mathcal{F}\left([a, b], \mathbb{R}\right), +, \cdot\right)$.
- $\left(\mathcal{C}pm\left([a, b], \mathbb{R}\right), +, \times\right)$ est un sous anneau de $\left(\mathcal{F}\left([a, b], \mathbb{R}\right), +, \times\right)$.

Encadrement d'une fonction continue par morceau par 2 fonctions en escalier :
Soit f une fonction continue par morceaux sur $[a, b]$ et $\varepsilon > 0$ fixé.
Il existe e et E 2 fonctions en escalier sur $[a, b]$ telles que :

- $e \leqslant f \leqslant E$ et
- $\forall x \in [a, b]$, $E(x) - e(x) \leqslant \varepsilon$.

Intégration d'une fonction en escalier : Soit $e : [a, b] \to \mathbb{R}$ une foncion en escalier sur $[a, b]$ associée à une subdivision $(a_i)_{i=0..n}$ de $[a, b]$.
On a $\forall i \in [\![0, n-1]\!]$, $\forall x \in]a_i, a_{i+1}[$, $e(x) = \lambda_i$ (constante).
On appelle intégrale sur $[a, b]$ de la fonction e, notée $\displaystyle\int_a^b e$, le réel : $\displaystyle\int_a^b e = \sum_{i=0}^{n-1} \lambda_i (a_{i+1} - a_i)$.

Propriétés :

- La valeur de $\displaystyle\int_a^b e$ est indépendante de la valeur prise par la fonction e aux points $a_0, a_1, \ldots, a_n$.

- Linéarité : si e et E sont en escalier sur $[a,b]$ et $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$,
  alors $\displaystyle\int_a^b(\alpha e+\beta E)=\alpha\int_a^b e+\beta\int_a^b E$.
- Croissance :
  – Si $e:[a,b]\to\mathbb{R}$ est en escalier et à valeurs positives ($e\geqslant 0$), alors $\displaystyle\int_a^b e\geqslant 0$.
  – Si $e,E:[a,b]\to\mathbb{R}$ sont en escalier et telles que $e\leqslant E$, alors $\displaystyle\int_a^b e\leqslant\int_a^b E$.

Lien intégrale de fonction en escalier - fonction continue par morceaux : Soit $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ continue par morceau sur $[a,b]$.
Alors on appelle intégrale de f sur $[a,b]$, notée $\displaystyle\int_{[a,b]}f$, le réel :

$$\begin{aligned}\int_{[a,b]}f &= Sup\{\int_a^b e|e \text{ en escalier sur } [a,b] \text{ telle que } e\leqslant f\}\\ &= Inf\{\int_a^b E|E \text{ en escalier sur } [a,b] \text{ telle que } E\geqslant f\}\end{aligned}$$

Propriétés : Toutes les propriétés de l'intégrale de fonction en escalier restent vraies pour l'intégrale de fonction continues par morceaux.
- Valeur absolue : Si $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ continue par morceau, alors $\displaystyle\left|\int_{[a,b]}f\right|\leqslant\int_{[a,b]}|f|$.
- Inégalité de la moyenne : Soit $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$ 2 fonctions continues par morceaux sur $[a,b]$,
  alors $\displaystyle\left|\int_{[a,b]}f\times g\right|\geqslant\left(Sup_{[a,b]}|f|\right)\times\int_{[a,b]}|g|$.
- Relation de Chasles : Soit $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ continue par morceaus sur $[a,b]$ et $c\in[a,b]$.
  On a $\displaystyle\int_{[a,c]}f+\int_{[c,b]}f=\int_{[a,b]}f$.

Notation $\displaystyle\int_a^b$: Soit $f:I\to\mathbb{R}$ avec I intervalle de $\mathbb{R}$ tel que f est continue par morceaux sur tout le segment I.

Pour $a,b\in I$, on pose : $$\begin{aligned}\int_a^b f(x)dx &= \int_{[a,b]}f \text{ si } a<b\\ &= -\int_{[a,b]}f \text{ si } a>b\\ &= 0 \text{ si } a=b\end{aligned}.$$

Primitive : Soit $f:I\to\mathbb{R}$, une fonction continue (I intervalle de $\mathbb{R}$).
On dit qu'une fonction $F:I\to\mathbb{R}$ est une primitive de f sur I lorsque :
- F est dérivable sur I et
- $F'=f$ i.e. $\forall x\in I$, $F'(x)=f(x)$.

Propriété : Soit $f:I\to\mathbb{R}$ une fonction, I un intervalle de $\mathbb{R}$.
Si f admet une primitive F_0 sur I, alors toutes les primitives de f sur I sont de la forme $F=F_0+$constante.

Problème d'existence d'une primitive : Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction f sur I et $a \in I$.

On pose $F : \left| \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \displaystyle\int_a^x f(t)dt \end{array} \right.$.

On a que F est une primitive de f sur I.

Conséquences : Pour $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue,

- f admet une unique primitive qui s'annule en a : c'est $F : \left| \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \displaystyle\int_a^x f(t)dt \end{array} \right.$.
- Si f est continue sur I et H est une primitive de f sur I, alors $\displaystyle\int_a^b f(t)dt = [H]_a^b = H(b) - H(a)$.

Intégrale fonction de la borne supérieure : Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue.
Soit $u : J \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable telle que $u(J) \subset I$.

On pose $\varphi : \left| \begin{array}{ccc} J & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \displaystyle\int_a^{u(x)} f(t)dt \end{array} \right.$.

On a φ dérivable sur J et $\forall x \in J$, $\varphi'(x) = u'(x) \times f(u(x))$.

Intégrale fonction des bornes : Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue.
Soit $u, v : J \to \mathbb{R}$ 2 fonctions dérivables telle que $u(J) \subset I$ et $v(J) \subset I$.

On pose $\psi : \left| \begin{array}{ccc} J & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \displaystyle\int_{v(x)}^{u(x)} f(t)dt \end{array} \right.$.

On a ψ dérivable sur J et $\forall x \in J$, $\psi'(x) = u'(x) \times f(u(x)) - v'(x) \times f(v(x))$.

Théorème de la moyenne : Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue sur le segment $[a,b]$.
Alors il existe $c \in [a,b]$ tel que $\displaystyle\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt = f(c)$.

Intégration par partie : Soit $u, v : [a,b] \to \mathbb{R}$ 2 fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,b]$.
On a alors $\displaystyle\int_a^b u'(t)v(t)dt = [u(t)v(t)]_a^b - \int_a^b u(t)v'(t)dt$.

Changement de variable : Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue.
$\varphi : J \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ avec $\varphi(J) \subset I$, $a, b \in J$.
Alors $\displaystyle\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(t)dt = \int_a^b f(\varphi(t))\, \varphi'(t)dt$.

Intégrale de fonctions paires, impaires et périodiques : Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue, $a, b \in \mathbb{R}$.

- Si f est paire, alors $\displaystyle\int_{-a}^a f(t)dt = 2\int_0^a f(t)dt$.
- Si f est impaire, alors $\displaystyle\int_{-a}^a f(t)dt = 0$.
- Si f est T-périodique, alors $\displaystyle\int_a^{a+T} f(t)dt = \int_{a+T}^{a+2T} f(t)dt = \int_{a+2T}^{a+3T} f(t)dt = \ldots$.

Théorème de positivité améliorée : Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ avec $a < b$, continue et positive sur $[a, b]$.
On a $\displaystyle\int_a^b f(t)dt = 0$ ssi $f = \mathcal{O}$ (fonction nulle sur ab).

Inégalité de Cauchy-Schwarz : Soit $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ 2 fonctions continues.
On a : $\displaystyle\left|\int_a^b f(t)g(t)dt\right| \leqslant \sqrt{\int_a^b f^2(t)dt} \times \sqrt{\int_a^b g^2(t)dt}.$

Somme de Riemann : Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continue sur le segment $[a, b]$.
On subdivise le segment $[a, b]$ de façon uniforme en plusieurs segments de longueurs $\dfrac{b-a}{n}$.
$\displaystyle S_n(f) = \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(a + k\left(\frac{b-a}{n}\right)\right)$ et $\displaystyle S'_n(f) = \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k\left(\frac{b-a}{n}\right)\right)$.
S_n et S'_n sont appelées sommes de Riemann associée à f.

Théorème de convergence des sommes de Riemann : Si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ est continue sur le segment $[a, b]$, alors les 2 suites $(S_n(f))_n$ et $(S'_n(f))_n$ convergent vers $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$.

Méthode des trapèzes : Soit $: [a, b] \to \mathbb{R}$ continue sur $[a, b]$, on subdivise $[a, b]$ en segments réguliers de longueur $\dfrac{b-a}{n}$.
$\displaystyle T_n(f) = \frac{b-a}{n}\left(\frac{f(a)+f(b)}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right)\right)$.
Si f est continue sur le segment $[a, b]$, alors $\displaystyle T_n(f) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_a^b f(x)dx$.

2.11 Fonctions numériques d'une variable complexe

Dans toute cette partir, on considère des fonctions $f : I \to \mathbb{C}$ où I est un intervalle de $\mathbb{R}$.
On note $Re(f) : \begin{array}{ccc} I & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & Re\left(f\left(x\right)\right) \end{array}$ et $Im(f) : \begin{array}{ccc} I & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & Im\left(f\left(x\right)\right) \end{array}$ qui sont à valeurs réelles.

Fonction bornée : f est bornée sur I dans $\mathbb{C}$ ssi $Re(f)$ et $Im(f)$ sont bornées sur I dans $\mathbb{R}$.

Convergence : Soit $f : I \to \mathbb{C}$ une fonction à valeur dans $\mathbb{C}$ et $a \in I$ ou a une borne finie de I.

- On dit que f admet $l \in \mathbb{C}$ comme limite en a, ce que l'on note $f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} l$, lorsque : $\forall \varepsilon > 0, \exists\ \alpha > 0$ tel que $\forall x \in I$, $(|x-a| < \alpha \Rightarrow |f(x) - l| \leqslant \varepsilon)$.
- On dit que f admet $l \in \mathbb{C}$ comme limite en $+\infty$, que l'on note $f(x) \underset{x\to +\infty}{\longrightarrow} l$ lorsque : $\forall \varepsilon > 0, \exists\ A > 0$ tel que $\forall x \in I$, $(x > A \Rightarrow |f(x) - f(a)| \leqslant \varepsilon)$.

Soit $l \in \mathbb{C}$ avec $l = l_1 + il_2$ $(l_1, l_2 \in \mathbb{R})$.
$f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} l$ (converge dans $\mathbb{C}$) $\Leftrightarrow Re(f)(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} l_1$ et $Im(f)(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} l_2$.

Dérivabilité : Soit $f : I \to \mathbb{C}$ et $a \in I$. On dit que f est dérivable en a lorsque $\dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$ converge (vers $l \in \mathbb{C}$) quand x tend vers a. Dans ce cas, on note $l = f'(a)$.
f dérivable en a ssi $Re(f)$ et $Im(f)$ sont dérivables en a (au sens classique dans $\mathbb{R}$ et dans ce cas, $f'(a) = \left(Re\left(f\right)\right)'(a) + i\left(Im\left(f\right)\right)'(a)$.
Ainsi, $Re\left(f'\left(a\right)\right) = \left(Re\left(f\right)\right)'(a)$ et $Im\left(f'\left(a\right)\right) = \left(Im\left(f\right)\right)'(a)$.

Théorème de composition avec l'exponentielle complexe : Si $\varphi : I \to \mathbb{C}$ est dérivable sur I, alors $f : \left| \begin{array}{ccc} I & \to & \mathbb{C} \\ x & \mapsto & e^{\varphi(x)} \end{array} \right.$ est dérivable sur I avec $\forall x \in I$, $f'(x) = \varphi'(x)e^{\varphi(x)}$.

Définition de l'intégration d'une fonction à valeurs complexes : Soit $f : [a, b] \to \mathbb{C}$ une fonction continue par morceaux sur $[a, b]$.
On définit $\displaystyle\int_a^b f(t)dt = \int_a^b Re(f)(t)dt + i\int_a^b Im(f)(t)dt$.

Propriété : Soit $f : [a, b] \to \mathbb{C}$ continue par morceaux sur $[a, b]$ $(a \leqslant b)$.,
alors on a $\displaystyle\left|\int_a^b f(t)dt\right| \leqslant \int_a^b |f(t)|dt$.

2.12 Développements limités

Formule de Taylor avec reste intégrale : Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^{n+1}$.
On a : $f(b) = f(a) + (b-a)f'(a) + \dfrac{(b-a)^2}{2!}f''(a) + \ldots + \dfrac{(b-a)^n}{n!}f^{(n)}(a) + \displaystyle\int_a^b \dfrac{(b-t)^n}{n!}f^{n+1}(t)dt.$

Inégalité de Taylor-Lagrange : Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction $\mathcal{C}^{n+1}$ et $a, b \in I$.
On note $M = Sup\left\{\left|f^{(n+1)}(t)\right| |t \text{ compris entre } a \text{ et } b\right\}$.
On a $\left|f(b) - \left[f(a) + (b-a)f'(a) + \ldots + \dfrac{(b-a)^n}{n!}f^{(n)}(a)\right]\right| \leqslant \dfrac{M|b-a|^{n+1}}{(n+1)!}$.

Formule de Taylor-Young : Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction et $a \in I$ fixé.
On suppose que f est $\mathcal{C}^n$ au voisinage $v(a)$ de a.
On a $\forall x \in v(a)$, $f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \dfrac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots + \dfrac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + (x-a)^n\varepsilon(x)$
avec $\varepsilon(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} 0$.

Développements limités : Soit f une fonction définie sur un voisinage pointé de 0 et f à valeurs réelles.
On dit que f admet un développement limité à l'ordre $n (\in \mathbb{N})$ en 0 lorsque :
il existe $a_0, a_1, \ldots, a_n$ constantes réelles et une fonction ε telle que $\varepsilon(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$ tels que :

$$\forall x \in \overset{\bullet}{v}(0),\ f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n + x^n\varepsilon(x)$$

Développements limités er convergence :
- Si f admet un $DL_n(0)$, alors f admet une limite finie en 0.
- Si f admet un $DL_n(0)$ et si $0 \leqslant p \leqslant n$, alros f admet une $DL_p(0)$.

Unicité : Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction qui admet un DL d'ordre n au $\overset{\bullet}{v}(0)$:
$\forall x \in \overset{\bullet}{v}(0)$, $f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n + x^n\varepsilon(x)$ avec $\varepsilon(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$.
Alors les réells $a_0, a_1, \ldots, a_n$ et la fonction ε sont uniques par rapport à f.

Développements limités et parité : Si f admet un $DL_n(0)$ et
- si f est paire, alors la partie régulière de son $DL_n(0)$ ne contient que des monômes de degré pair.
- si f est impaire, alors la partie régulière de son $DL_n(0)$ ne contient que des monômes de degré impair.

Théorème opératoires sur les développements limités : Si f et g admettent un $DL_n(0)$,
- et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, alors $\alpha f + \beta g$ admet aussi un $DL_n(0)$.
- alors $f \times g$ admet aussi un $DL_n(0)$.

Développement limité d'une primitive : Si f admet un $DL_n(0)$, 0 y compris : $\forall x \in v(0)$,
$f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n + \underset{x\to 0}{o}(x^n)$.
F est une primitive de f sur $v(0)$.
Alors F admet un DL_{n+1} au $v(0)$, 0 y compris, donnée par :

$$\forall x \in v(0),\ F(x) = F(0) + a_0 x + \frac{a_1}{2}x^2 + \ldots + \frac{a_n}{n+1}x^{n+1} + \underset{x\to 0}{o}(x^{n+1})$$

Tangente en un point d'un arc paramétré : On munit le pan $\mathcal{P}$ d'un repère orthonormal normé direct $\mathscr{R} = (O, \vec{i}, \vec{j})$.

On considère une courbe paramétrée (I, f) de support Γ avec I intervalle de $\mathbb{R}$ et f : $\begin{array}{ccc} I & \to & \mathbb{R}^2 \\ t & \mapsto & (x(t), y(t)) \end{array}$ une fonction.

On note $M(t)$ le point du plan de coordonée $(x(t), y(t))$.

Hypothèse : x et y sont $\mathcal{C}^\infty$ au voisinage de t_0.

Développement limité vectoriel à l'odre n :

$$\forall x \in v(t_0),\ \overrightarrow{M(t_0)M(t)} = (t - t_0)\overrightarrow{A_1} + \frac{(t-t_1)^2}{2!}\overrightarrow{A_2} + \ldots + \frac{(t-t_0)^n}{n!}\overrightarrow{A_n} + (t-t_0)^n\overrightarrow{\varepsilon(t)}$$

avec $\overrightarrow{A_k} = \begin{pmatrix} x^{(k)}(t_0) \\ y^{(k)}(t_0) \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{\varepsilon}(t) \underset{t \to t_0}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

On note $\overrightarrow{A_p}$ le premier vecteur non nul de ce développement limité.

Γ admet en $M(t_0)$ comme tangente la droite passant par $M(t_0)$ et dirigée par $\vec{A_p} = \begin{pmatrix} x^{(p)}(t_0) \\ y^{(p)}(t_0) \end{pmatrix}$.

Point régulier - point singulier : Lorsque $p = 1$, on a $\overrightarrow{A_1}$ qui est appelé « vecteur vitesse en $M(t_0) \neq \overrightarrow{O}$ ». On dit que $M(t_0)$ est régulier.

Lorsque $p \geqslant 2$, on a $\overrightarrow{A_1} = \overrightarrow{O}$, on dit que $M(t_0)$ est singulier.

Pente de la tangente à Γ en $M(t_0)$: La pente de la tangente à Γ au point $M(t_0)$ est $\lim\limits_{t \to t_0} \dfrac{y'(t)}{x'(t)}$.

Classification des points d'une courbe paramétrée : On reprend les notation de la tangente en un point d'un arc paramétré.

On fixe q tel que $q = min\{k \in [\![p, n]\!] | \overrightarrow{A_k}$ libre avec $\overrightarrow{A_p}\}$.

	p impaire	p paire
q pair	$M(t_0)$ point normal	$M(t_0)$ point de rebroussement de 2e espèce
q impair	$M(t_0)$ point d'inflexion	$M(t_0)$ point de rebroussement de 1er espèce

2.13 Fonctions de deux variables

Norme : Soit E un espace vectorie, on appelle norme sur E une application $N : E \to \mathbb{R}$ telle que :

- $\forall X \in E$, $N(X) \geqslant 0$.
- $\forall X \in E$, $N(x) = 0$ ssi $X = 0_E$.
- $\forall X \in E$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $N(\lambda X) = |\lambda| N(X)$ (homogénéité).
- $\forall X, Y \in E$, $N(X+Y) \leqslant N(X) + N(Y)$ (inégalité triangulaire).

On dit que (E, N) est un espace vectoriel normé.

Quelques normes de $\mathbb{R}^2$: Pour $X = (x, y) \in \mathbb{R}^2$:
$N_1(X) = |x| + |y| \qquad N_2 = \sqrt{x^2 + y^2} \qquad N_\infty = max(|x|, |y|)$.
N_1 et N_∞ sont équivamentes sur $\mathbb{R}^2$: $\forall x \in \mathbb{R}^2$, $N_\infty(X) \leqslant N_1(X) \leqslant 2N_\infty(X)$.
N_1 et N_2 sont équivamentes sur $\mathbb{R}^2$: $\forall x \in \mathbb{R}^2$, $\dfrac{1}{\sqrt{2}} N_2(X) \leqslant N_1(X) \leqslant 2N_2(X)$.
On choist la norme N_2 pour la suite de l'étude. Ce choix n'a aucune incidence sur les résultats car les normes sont équivalentes.

Distance : Soit (E, N) un espace vectoriel normé. On appelle distance sur E associée à la norme N l'application : $d : \begin{array}{ccc} E \times E & \to & \mathbb{R} \\ (X, Y) & \mapsto & N(Y - X) \end{array}$.
d vérifie : $\forall X, Y, Z \in E$,

- $d(X, Y) \geqslant 0$.
- $d(X, Y) = 0$ ssi $X = Y$.
- $d(X, Y) \leqslant d(X, Z) + d(Z, Y)$.

Application avec $N = N_2$: $\forall X_1, \ldots, X_n \in E$,

- $|N(X) - N(Y)| \leqslant N(X - Y)$.
- $N(X_1 + \ldots + X_n) \leqslant N(X_1) + \ldots + N(X_n)$.

Boule ouverte - boule fermée de $\mathbb{R}^2$: Soit $A \in \mathbb{R}^2$ et r un réel strictement positif ($r > 0$).

- On appelle boule ouverte de centre A et de rayon r l'ensemble des points de $\mathbb{R}^2$ situés à une distance inférieure à r de A i.e. $\mathcal{B}(A, r) = \{M \in \mathbb{R}^2 | d(A, M) < r\}$
- On appelle boule fermée de centre A et de rayon r l'ensemble des points de $\mathbb{R}^2$ situés à une distance inférieure ou égale à r de A i.e. $\mathcal{B}_f(A, r) = \{M \in \mathbb{R}^2 | d(A, M) \leqslant r\}$

Ouvert de $\mathbb{R}^2$: Soit Ω une partie de $\mathbb{R}^2$: $\Omega \subset \mathbb{R}^2$.
On dit que Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^2$ ou une partie ouverte de $\mathbb{R}^2$ lorsque « chaque point de Ω est le centre d'une boule ouverte contenue dans Ω »i.e. $\forall A \in \Omega$, $\exists\ r > 0$ tel que $\mathcal{B}(A, r) \subset \Omega$.
Quelques propriétés :

- Une boule ouverte est un ouvert de $\mathbb{R}^2$.
- lE complémmentaire d'une boule fermée est un ouvert de $\mathbb{R}^2$/ En particulier, pour tout point A de $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^2 \setminus \{a\}$ est une partie ouverte.
- Si I et J sont 2 intervalles ouverts de $\mathbb{R}$, alors le produit cartésien $I \times J$ est un ouvert de $\mathbb{R}^2$.

Partie fermée de $\mathbb{R}^2$: Une partie F de $\mathbb{R}^2$ est dite fermée lorsque son complémentaire $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus F$ est un ouvert de $\mathbb{R}^2$.

Convergence de suite dans $\mathbb{R}^2$: Soit $\mathcal{U}_n = (x_n, y_n)$ une suite d'éléments de $\mathbb{R}^2$.
Soit $l = (l_1, l_2) \in \mathbb{R}^2$.
On dit que la suite $\mathcal{U}_n$ converge dans $\mathbb{R}^2$ vers l lorsque $||\mathcal{U}_n - l|| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
De plus, on a : $\mathcal{U}_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} l$ ssi $x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} l_1$ et $y_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} l_2$.

Limite en un point d'une fonction de 2 variables : Soit $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ une fonction de deux variables avec $\mathcal{D}$ une partie de $\mathbb{R}^2$.
Soit $A = (a, b) \in \mathcal{D}$ et $l \in \mathbb{R}$.
On dit que f admet l comme limite en A lorsque :
$\forall \varepsilon > 0$, $\exists\ \alpha > 0$ tel que $\forall (x, y) \in \mathcal{D}$, $(||(x, y) - (a, b)||) < \alpha \Rightarrow |f(x, y) - l| < \varepsilon$.

Théorème : Image d'une suite par une fonction : Soit $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ une fonction de deux variables avec $\mathcal{D}$ une partie de $\mathbb{R}^2$ et $A = (a, b) \in \mathcal{D}$ et $l \in \mathbb{R}$.
On a : $f(x, y) \underset{(x,y)\to(a,b)}{\longrightarrow} l$ ssi pour toutes suites (x_n, y_n) de $\mathcal{D}$ qui converge vers (a, b), on a $f(x_n, y_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} l$.

Continuité des fonctions de 2 variables : Soit $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ une fonction de 2 variables.
- Prenons $X_0 = (x_0, y_0) \in \mathcal{D}$. On dit que f est continue en X_0 lorsque $f(x, y) \underset{(x,y)\to(x_0,y_0)}{\longrightarrow} f(x_0, y_0)$.
- On dit que f est continue sur $\mathcal{D}$ lorsque f est continue en tout point X_0 de $\mathcal{D}$.

Théorèmes opératoires pour les fonctions continues à 2 variables :
1. Si $f, g : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ sont deux fonctions de 2 variables réelles continues sur $\mathcal{D}$, alors $\alpha f + \beta g$ et $f \times g$ sont continues sur $\mathcal{D}$ (avec $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$) et $\dfrac{1}{f}$ continue sur $\mathcal{D}$ (quand f ne s'annule pas sur $\mathcal{D}$).
2. Composition : si $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ est continue en $(x_0, y_0) \in \mathcal{D}$ et $\varphi : I \to \mathbb{R}$ est continue en $f(x_0, y_0)$, et $f(\mathcal{D}) \subset I$, alors $\varphi \circ f : \begin{array}{ccc} \mathcal{D} & \to & \mathbb{R} \\ (x, y) & \mapsto & \varphi\left(f\left(x, y\right)\right) \end{array}$ est continue en (x_0, y_0).

Application partielle : Soit $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ une fonction de 2 variables.
On fixe $X_0 = (x_0, y_0) \in \mathcal{D}$.
- On appelle première application partielle de f en (x_0, y_0) la fonction $f_1 : x \mapsto f(x, y_0)$. f_1 est définie sur $\mathcal{D}_1 = \{x \text{ tel que } (x, y_0) \in \mathcal{D}\}$.
- On appelle deuxième application partielle de f en (x_0, y_0) la fonction $f_2 : x \mapsto f(x_0, y)$. f_2 est définie sur $\mathcal{D}_2 = \{y \text{ tel que } (x_0, y) \in \mathcal{D}\}$.

Continuité et application partielle : Si $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ fonction de 2 variables est continue en $(x_0, y_0) \in \mathcal{D}$, alors la première application partielle f_1 est continue en x_0 et la deuxième application partielle f_2 est continue en y_0.

Dériver selon un vecteur : Soit $f : \begin{array}{ccc} \mathcal{U} & \to & \mathbb{R} \\ (x, y) & \mapsto & f(x, y) \end{array}$ une fonction de 2 variables avec $\mathcal{U}$ un ouvert de $\mathbb{R}^2$. On prend $X_0 = (x_0, y_0) \in \mathcal{U}$.
On prend un vecteur $\vec{h} = (h_1, h_2)$ non nul.
Considérons la fonction $\varphi : t \mapsto f(X_0 + t\vec{h})$
On dit que f admet au point (x_0, y_0) une dérivée selon le vecteur h (la direction $\vec{h}$) lorsque φ

est dérivable en 0.
Dans ce cas, le réel $\varphi'(0)$ est noté $\mathcal{D}_{\vec{h}}(f)(x_0, y_0)$.
$\mathcal{D}_{\vec{h}}(f)(x_0, y_0) = \lim\limits_{t \to 0} \dfrac{f\left((x_0, y_0) + t\,(h_1, h_2)\right) - f\,(x_0, y_0)}{t}$.

Dérivées partielles : Soit $\mathcal{U}$ un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et $f : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ une fonction de 2 variables et $X_0 = (x_0, y_0) \in \mathcal{U}$.

- On dit que f admet une dérivée partielle au point (x_0, y_0) selon la 1re composante lorsque f admet au point (x_0, y_0) une dérivée partielle selon le vecteur $\vec{h} = (1, 0)$ i.e. lorsque $\varphi_1 : t \mapsto f(x_0 + t, y_0)$ est dérivable en 0. Dans ce cas, on note $\varphi_1'(0) = \dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$ appelée 1re dérivée partielle de f au point (x_0, y_0).
- On dit que f admet une dérivée partielle au point (x_0, y_0) selon la 2e composante lorsque f admet au point (x_0, y_0) une dérivée partielle selon le vecteur $\vec{h} = (0, 1)$ i.e. lorsque $\varphi_2 : t \mapsto f(x_0, y_0 + t)$ est dérivable en 0. Dans ce cas, on note $\varphi_2'(0) = \dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$ appelée 2e dérivée partielle de f au point (x_0, y_0).

Théorème sur les dérivées partielles : Soit $\mathcal{U}$ un ouvert de $\mathbb{R}^2$.
- Soit f et g 2 fonctions de 2 variables qui admettent une dérivée partielle par rapport à la 1re composante en $(x_0, y_0) \in \mathcal{U}$.
  - Pour $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\alpha f + \beta g$ admet une dérivée partielle en (x_0, y_0) par rapport à la 1re composante avec $\dfrac{\partial(\alpha f + \beta g)}{\partial x}(x_0, y_0) = \alpha \dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + \beta \dfrac{\partial g}{\partial x}(x_0, y_0)$.
  - $f \times g$ admet une dérivée partielle en (x_0, y_0) par rapport à la 1re composante avec $\dfrac{\partial(f \times g)}{\partial x}(x_0, y_0) = \dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) g(x_0, y_0) + f(x_0, y_0) \dfrac{\partial g}{\partial x}(x_0, y_0)$.
  - Si f ne s'annule pas sur $\mathcal{U}$, $\dfrac{1}{f}$ admet une dérivée partielle en (x_0, y_0) par rapport à la 1re composante avec $\dfrac{\partial \frac{1}{f}}{\partial x}(x_0, y_0) = -\dfrac{\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)}{\left(f\,(x_0, y_0)\right)^2}$.
- Soit $f : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ une fonction de 2 variables admettant une dérivée aprtielle par rapport à la 1re composante en (x_0, y_0).
  Soit $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction d'une variable dérivable en $f(x_0, y_0)$ avec $f(\mathcal{U}) \subset I$.
  Alors la fonction $\varphi \circ f : \begin{array}{ccc} \mathcal{U} & \to & \mathbb{R} \\ (x, y) & \mapsto & \varphi\left(f\,(x, y)\right) \end{array}$ admet une dérivée partielle par rapport à la 1re composante en (x_0, y_0) avec : $\dfrac{\partial(\varphi \circ f)}{\partial x}(x_0, y_0) = \dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\varphi'\left(f\,(x_0, y_0)\right)$.

Les théorèmes sont similaires pour $\dfrac{\partial \bullet}{\partial y}$.

Fonction de classe $\mathcal{C}^1$: Soit $\mathcal{U}$ un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et $f : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ une fonction de 2 variables. On dit que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathcal{U}$ lorsque :
- f admet 2 dérivées partielles en chaque point de $\mathcal{U}$ et
- les fonctions de 2 variables $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ sont continues sur $\mathcal{U}$.

Théorèmes opératoires sur les fonctions de classe $\mathcal{C}^1$: Soit $\mathcal{U}$ un ouvert de $\mathbb{R}^2$.
- Soit f et g 2 fonctions de 2 variables de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathcal{U}$.
  - Pour $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\alpha f + \beta g$ est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathcal{U}$.

– $f \times g$ est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathcal{U}$.
– Si f ne s'annule pas sur $\mathcal{U}$, $\dfrac{1}{f}$ est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathcal{U}$.

- Soit $f : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ une fonction de 2 variables admettant une dérivée aprtielle par rapport à la 1re composante en (x_0, y_0).
Soit $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction d'une variable dérivable en $f(x_0, y_0)$ avec $f(\mathcal{U}) \subset I$.
Alors la fonction $\varphi \circ f : \begin{array}{ccc} \mathcal{U} & \to & \mathbb{R} \\ (x, y) & \mapsto & \varphi(f(x, y)) \end{array}$ est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathcal{U}$.

Structure : Soit $\mathcal{U}$ un ouvert de $\mathbb{R}^2$. On note $\mathscr{C}^1(\mathcal{U}, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions de 2 variables, définies sur $\mathcal{U}$, de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathcal{U}$.

- $\left(\mathscr{C}^1(\mathcal{U}, \mathbb{R}), +, \times\right)$ est un anneau.
- $\left(\mathscr{C}^1(\mathcal{U}, \mathbb{R}), +, \cdot\right)$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

Théorème fondamental : développement limité : Soit $f : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathcal{U}$ un ouvert de $\mathbb{R}^2$. Soit $X_0 = (x_0, y_0) \in \mathcal{U}$.
On note $\vec{h} = (h_1, h_2) \in \mathbb{R}^2$.

- On a : développement limité à l'ordre 1 de f en X_0 :
$f(X_0 + h) = f(X_0) + h_1 \dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + h_2 \dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) + ||\vec{h}||\varepsilon(\vec{h})$ où $\varepsilon(\vec{h}) \underset{\vec{h} \to (0,0)}{\longrightarrow} 0$
- f admet une dérivée en (x_0, y_0) selon toute direction $\vec{H} \neq (0, 0)$ avec :
$\mathcal{D}_{\vec{h}} f(x_0, y_0) = h_1 \dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + h_2 \dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$.

Conséquence : Si $f : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ fonction de 2 variables est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathcal{U}$, alors f continue sur $\mathcal{U}$.

Gradient : Soit $f : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathcal{U}$ un ouvert de $\mathbb{R}^2$. Soit $X_0 = (x_0, y_0) \in \mathcal{U}$.
On note $\vec{h} = (h_1, h_2) \in \mathbb{R}^2$.
On considère la fonction $df_{X_0} : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (h_1, h_2) & \mapsto & h_1 \dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + h_2 \dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \end{array}$.
On note $\overrightarrow{grad}_{X_0} f = \left(\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0), \dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\right)$ appelé vecteur gradient de f en X_0.
Dans $\mathbb{R}^2$ muni du produit scalaire usuel, on a : $\forall \vec{h} = (h_1, h_2)$, $df_{X_0}(\vec{h}) = < \vec{h}, \overrightarrow{grad}_{X_0} f >$.
df_{X_0} est une forme linéaire sur $\mathbb{R}^2$ appelée la différentielle de f en X_0.

Composition d'une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^2$ par une fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$: Soit $f : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathcal{U}$ un ouvert de $\mathbb{R}^2$.
Soit I un intervale de $\mathbb{R}$ et $\begin{array}{l} x : t \mapsto x(t) \\ y : t \mapsto y(t) \end{array}$ 2 fonctions d'une variables de classe $\mathcal{C}^1$ sur I.
Hypothèse : $\forall t \in I$, $(x(t), y(t)) \in \mathcal{U}$.
On définit alors $F : \begin{array}{ccc} I & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & f(x(t), y(t)) \end{array}$.
On a F $\mathcal{C}^1$ de I dans $\mathbb{R}$ avec : $\forall t \in I$, $F'(t) = x'(t) \dfrac{\partial f}{\partial x}(x(t), y(t)) + y'(t) \dfrac{\partial f}{\partial y}(x(t), y(t))$.

Composition d'une fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ avec une fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$: Soit $f : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathcal{U}$ un ouvert de $\mathbb{R}^2$.
Soit u et v 2 fonctions de 2 variables sur Ω un ouvert de $\mathbb{R}^2$ avec u, v $\mathcal{C}^1$ sur Ω : $\left\{ \begin{array}{l} u : (x, y) \mapsto u(x, y) \\ v : (x, y) \mapsto v(x, y) \end{array} \right.$.

Hypothèse : $\forall (x,y)\in\Omega,\ (u(x,y),v(x,y))\in\mathcal{U}$.

On définit alors $F:\begin{array}{ccc}\Omega & \to & \mathbb{R}\\ (x,y) & \mapsto & f(u(x,y),v(x,y))\end{array}$.

On a F fonction de 2 variables de classe $\mathcal{C}^1$ de Ω dans $\mathbb{R}$ avec $\forall (x,y)\in\Omega$:

- $\dfrac{\partial F}{\partial x}(x,y)=\dfrac{\partial u}{\partial x}(x,y)\dfrac{\partial f}{\partial u}(u(x,y),v(x,y))+\dfrac{\partial v}{\partial x}(x,y)\dfrac{\partial f}{\partial v}(u(x,y),v(x,y))$.
- $\dfrac{\partial F}{\partial y}(x,y)=\dfrac{\partial u}{\partial y}(x,y)\dfrac{\partial f}{\partial u}(u(x,y),v(x,y))+\dfrac{\partial v}{\partial y}(x,y)\dfrac{\partial f}{\partial v}(u(x,y),v(x,y))$.

Application au coordonnées cartésiennes - polaires : Soit $f:\begin{array}{ccc}\mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}\\ (x,y) & \mapsto & f(x,y)\end{array}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

Pour ρ et $\theta\in\mathbb{R}$, on pose $F(\rho,\theta)=f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)$. F est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ avec $\forall \rho,\theta\in\mathbb{R}$:

- $\dfrac{\partial F}{\partial \rho}(\rho,\theta)=\cos\theta\dfrac{\partial f}{\partial x}(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)+\sin\theta\dfrac{\partial f}{\partial y}(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)$
- $\dfrac{\partial F}{\partial \theta}(\rho,\theta)=-\rho\sin\theta\dfrac{\partial f}{\partial x}(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)+\rho\cos\theta\dfrac{\partial f}{\partial y}(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)$

Dérivées partielles secondes : Soit $\mathcal{U}$ un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et $f:\mathcal{U}\to\mathbb{R}$ une fonction de 2 variables telle que f admet des dérivées partielles en tout point de $\mathcal{U}$.

$\dfrac{\partial f}{\partial x}$ est une nouvelle fonction de 2 variables sur $\mathcal{U}$ qui est suceptible d'admettre des dérivées partielles en chaque point de $\mathcal{U}$.

Soit (x_0,y_0).

- Si $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ admet une dérivée partielle selon la 1re composante en (x_0,y_0), le réel $\dfrac{\partial\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)}{\partial x}(x_0,y_0)$ sera noté $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0)$.
- Si $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ admet une dérivée partielle selon la 2e composante en (x_0,y_0), le réel $\dfrac{\partial\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)}{\partial y}(x_0,y_0)$ sera noté $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(x_0,y_0)$.
- Si $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ admet une dérivée partielle selon la 1re composante en (x_0,y_0), le réel $\dfrac{\partial\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)}{\partial x}(x_0,y_0)$ sera noté $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x_0,y_0)$.
- Si $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ admet une dérivée partielle selon la 2e composante en (x_0,y_0), le réel $\dfrac{\partial\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)}{\partial y}(x_0,y_0)$ sera noté $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0,y_0)$.

Fonction de classe $\mathcal{C}^2$: Soit $\mathcal{U}$ un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ une fonction de 2 variables. On dit que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathcal{U}$ lorsque :

- f admet des dérivées partielles secondes en tout point (x_0,y_0) de $\mathcal{U}$ et
- celles-ci sont continues sur $\mathcal{U}$.

Théorème de Schwarz : Si $f:\mathcal{U}\to\mathbb{R}$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur un ouvert de $\mathbb{R}^2$, alors $\forall (x_0,y_0)\in\mathcal{U},\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x_0,y_0)=\dfrac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(x_0,y_0)$.

Extrema locaux : Soit $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ une fonction de 2 variables avec $\mathcal{D}$ une partie de $\mathbb{R}^2$ et X_0 un point de $\mathcal{D}$.

- On dit que f présente en $X_0 = (x_0, y_0)$ un minimum local lorsque $f(X_0)$ minore f sur un voisinage de X_0 (i.e. sur une boule ouverte centrée en X_0).
- On dit que f présente en $X_0 = (x_0, y_0)$ un maximum local lorsque $f(X_0)$ majore f sur un voisinage de X_0 (i.e. sur une boule ouverte centrée en X_0).

Extremum et dérivée partielle : Soit $f : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ une fonction de 2 variables, de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathcal{U}$.
Soit $X_0 = (x_0, y_0) \in \mathcal{U}$. Si f présente un extremum local en (x_0, y_0), alors

- $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = 0$ et
- $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0$.

Fonction de $\mathbb{R}^2$ à valeurs dans $\mathbb{R}^2$: Soit $f : \mathcal{D}_f \to \mathbb{R}^2$ où $\mathcal{D}_f$ est une partie de $\mathbb{R}^2$. Soit $X_0 = (x_0, y_0) \in \mathcal{D}_f$ et soit $l = (l_1, l_2) \in \mathbb{R}^2$.
On dit que f admet l comme limite en X_0 lorsque :
$\forall \varepsilon > 0, \exists\ \alpha > 0, \forall (x,y) \in \mathcal{D}_f, (||(x,y) - (x_0,y_0)|| < \alpha \Rightarrow ||f(x,y) - l|| \leqslant \varepsilon)$.
On note $f(x,y) \underset{(x,y)\to(x_0,y_0)}{\longrightarrow} l$.
f admet l comme limite en (x_0, y_0) ssi f_1 admet l_1 comme limite en (x_0, y_0) et f_2 admet l_2 comme limite en (x_0, y_0).

Continuité : Soit $f : \mathcal{D}_f \to \mathbb{R}^2$ où $\mathcal{D}_f$ est une partie de $\mathbb{R}^2$. Soit $a \in \mathcal{D}_f$.

- On dit que f est continue au point a lorsque $f(x,y) \underset{(x,y)\to a}{\longrightarrow} f(a)$.
- On dit que f est continue sur $\mathcal{D}_f$ lorsqu'elle l'est en tout point de $\mathcal{D}_f$.

f est continue en a ssi f_1 et f_2 sont continues en a.

Fonction $\mathcal{C}^1$ et matrice jacobienne : Soit $f : \mathcal{U} \to \mathbb{R}^2$.
On dit que f est $\mathcal{C}^2$ sur $\mathcal{U}$ (ouvert de $\mathbb{R}^2$ lorsque f_1 et f_2 le sont.
On appelle matrice jacobienne de f au point $(x_0, y_0) \in \mathcal{U}$ la matrice :

$$J_f(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x}(x_0, y_0) & \dfrac{\partial f_1}{\partial y}(x_0, y_0) \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x}(x_0, y_0) & \dfrac{\partial f_2}{\partial y}(x_0, y_0) \end{pmatrix}.$$

Fonctions de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}$: Soit $f : \begin{array}{ccc} \mathcal{D}_f & \to & \mathbb{R} \\ (x,y,z) & \mapsto & f(x,y,z) \end{array}$ où $\mathcal{D}_f$ une partie de $\mathbb{R}^3$.
On pose $X(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$.
On pose : $N_1(X) = |x| + |y| + |z| \qquad N_2(X) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \qquad N_\infty(X) = max(|x|, |y|, |z|)$.
N_1, N_2 et N_3 sont équivalentes sur $\mathbb{R}^3$.

- $\exists\ \alpha, \beta$ tels que $\alpha N_1(X) \leqslant N_2(X) \leqslant \beta N_1(X)$.
- $\exists\ \gamma, \delta$ tels que $\gamma N_1(X) \leqslant N_\infty(X) \leqslant \delta N_1(X)$.
- $\exists\ \lambda, \mu$ tels que $\lambda N_2(X) \leqslant N_\infty(X) \leqslant \mu N_2(X)$.

On choist la norme N_2 pour la suite de l'étude. Ce choix n'a aucune incidence sur les résultats car les normes sont équivalentes.

Boule ouverte - boule fermée de $\mathbb{R}^3$: Soit $_0 = (x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$ et r un réel strictement positif ($r > 0$).

- On appelle boule ouverte de centre A et de rayon r l'ensemble des points de $\mathbb{R}^3$ situés à une distance inférieure à r de X_0 i.e. $\mathcal{B}(X_0, r) = \{X \in \mathbb{R}^3 | d(X_0, X) < r\}$
- On appelle boule fermée de centre A et de rayon r l'ensemble des points de $\mathbb{R}^3$ situés à une distance inférieure ou égale à r de X_0 i.e. $\mathcal{B}_f(X_0, r) = \{X \in \mathbb{R}^2 | d(X_0, X) \leqslant r\}$

Application partielle : Soit $f : \mathcal{D}_f \to \mathbb{R}$ une fonction de 3 variables avec $\mathcal{D}_f$ une partie de $\mathbb{R}^2$.
On fixe $X_0 = (x_0, y_0, z_0) \in \mathcal{D}_f$.

- On appelle première application partielle de f en X_0 la fonction $f_1 : x \mapsto f(x, y_0, z_0)$.
- On appelle première application partielle de f en X_0 la fonction $f_2 : x \mapsto f(x_0, y, z_0)$.
- On appelle première application partielle de f en X_0 la fonction $f_2 : x \mapsto f(x_0, y_0, z)$.

Si la fonction de 3 variables f est continue en (x_0, y_0, z_0), alors :
f_1 est continue en x_0 et f_2 est continue en y_0 et f_3 est continue en z_0.

Dérivées partielles : Soit $\mathcal{U}$ un ouvert de $\mathbb{R}^3$ et $f : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ une fonction de 3 variables et $X_0 = (x_0, y_0, z_0) \in \mathcal{U}$.

- On dit que f admet une dérivée partielle au point (x_0, y_0, z_0) selon la 1re composante lorsque f_1 est dérivable en x_0 et on note alors $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0, z_0) = f_1'(x_0)$.
- On dit que f admet une dérivée partielle au point (x_0, y_0, z_0) selon la 2e composante lorsque f_2 est dérivable en y_0 et on note alors $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0, z_0) = f_2'(y_0)$.
- On dit que f admet une dérivée partielle au point (x_0, y_0, z_0) selon la 3e composante lorsque f_3 est dérivable en z_0 et on note alors $\dfrac{\partial f}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) = f_3'(z_0)$.

Fonction $\mathcal{C}^1$: Soit $\mathcal{U}$ un ouvert de $\mathbb{R}^3$ et $f : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ une fonction de 3 variables.
f est dite $\mathcal{C}^1$ sur $\mathcal{U}$ lorsque ces 3 dérivées partielles sont définies sur $\mathcal{U}$ et y sont continues.

Théorème fondamental : Soit $\mathcal{U}$ un ouvert de $\mathbb{R}^3$ et $f : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ une fonction $\mathcal{C}^1$ sur $\mathcal{U}$ de 3 variables.
Soit $X_0 = (x_0, y_0, z_0) \in \mathcal{U}$, $\vec{h} = (h_1, h_2, h_3) \in \mathbb{R}^3$.
On a le développement limité de f :

$$f(X_0+\vec{h}) = f(X_0)+h_1\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0, z_0)+h_2\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0, z_0)+h_3\frac{\partial f}{\partial z}(x_0, y_0, z_0)+||\vec{h}||\varepsilon(\vec{h}) \text{ où } \varepsilon(\vec{h}) \underset{h\to(0,0,0)}{\longrightarrow} 0$$

2.14 Propriétés métriques des arcs

Dans toute cette partie, on étudie des courbes paramétrées planes.
On munit le plan $\mathbb{R}^2$ d'un repère orthonormal direct $\mathscr{R} = (0, \vec{i}, \vec{j})$. On note $||.||$ la norme euclidienne usuelle sur $\mathbb{R}^2$.
I et J désignent deux iontervalles de $\mathbb{R}$ et $k \in \mathbb{N}^\star \cup \{+\infty\}$.

Rappels : On appelle courbe plane paramétrée de classe $\mathcal{C}^k$ tout couple (I, f) où :

- I est un intervalle de $\mathbb{R}$ et
- f est une application de I dans $\mathbb{R}^2$ de classe $\mathcal{C}^k$: $f \in \mathscr{C}(I, \mathbb{R}^2)$.

L'ensemble de points $\Gamma = \{f(t) | t \in I\}$ est appelé le support de la courbe paramétrée.

$\mathcal{C}^k$-difféomorphisme : Soit $\varphi : I \to J$ une application. On dit que φ est un $\mathcal{C}^k$-difféomorphisme de I sur J lorsque :
• φ est bijective de I sur J • φ est de classe $\mathcal{C}^k$ sur I • φ^{-1} est de classe $\mathcal{C}^k$ sur J.

Paramétrage admissible : Soit (I, f) et (J, g) deux courbes paramétrées.
On dit que (J, g) est un paramétrage admissible de classe $\mathcal{C}^k$ de (I, f) s'il existe un $\mathcal{C}^k$-difféomorphisme φ de I sur J tel que $f = g \circ \varphi$.
Une telle application φ est appelée un changement de paramétrage de classe $\mathcal{C}^k$.

Paramétrages admissibles et supports : Si (J, g) est un paramétrage admissibble de (I, f), alors les deux courbes ont même support.

$\mathcal{C}^k$-difféomorphisme et monotonie : Si φ est un $\mathcal{C}^k$-difféomorphisme de I sur J, alors φ est strictement mmonotone sur I.

Relation « avoir la même orientation que » : On définit sur l'ensemble des courbes paramétrées planes de classe $\mathcal{C}^k$ une relation binaire « avoir la même orientation que »comme suit :
(I, f) a la même orientation que (J, g) s'il existe $\varphi : I \to J$ changement de paramétrage croissant tel que $f : g \circ \varphi$.
Cette relation est réflexive, symétrique et transitive.
Il y a exactement deux orientations entre deux paramétrages admissibles.
Dire qu'une courbe (I, f) est orientée, c'est ne s'autoriser que des changements de paramétrage croissants pour l'étude de f.

Théorème : Longueur d'un arc : Soit $\Gamma = (I, f)$ une courbe paramtrée de classe $\mathcal{C}^1$.
Soit M_0 et M_1 2 points de Γ de paramètres $t_0, t_1 \in I$ tels que $t_0 \leqslant t_1$.
La longueur de l'arc $\widehat{M_0M_1}$ est donnée par :

$$\ell(\widehat{M_0M_1}) = \int_{t_0}^{t_1} \left\| \overrightarrow{f'(t)} \right\|$$

La longueur de l'arc $\widehat{M_0M_1}$ est indépendante du paramétrage admissible choisi pour Γ.

Calcul en coordonnées cartésiennes : On suppose que la courbe paramétrée $\Gamma = (I, f)$ est représentée en coordonnées cartésiennes dans le repère orthonormal direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$ par $\forall t \in I$, $\overrightarrow{f(t)} = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j}$.
On a alors $\forall t \in I$, $\overrightarrow{f'(t)} = x'(t)\vec{i} + y'(t)\vec{j}$ d'où pour M_0 et M_1 2 points de Γ de paramètres $t_0, t_1 \in I$ tels que $t_0 \leqslant t_1$,

$$\ell(\widehat{M_0M_1}) = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}$$

Calcul en coordonnées polaires : On suppose que la courbe paramétrée $\Gamma = (I, f)$ est donnée par l'équation polaire $\rho = \rho(\theta)$ dans le repère orthonormal direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$ par $\forall \theta \in I$, $\overrightarrow{f(\theta)} = \rho(\theta)\overrightarrow{u_\theta}$.
Dès lors $\forall \theta \in I$, $\overrightarrow{f'(t)} = \rho'(\theta)\overrightarrow{u_\theta} + \rho(\theta)\overrightarrow{u_{\theta+\pi/2}}$ et comme $\{\overrightarrow{u_\theta}, \overrightarrow{u_{\theta+\pi/2}}\}$ est une base orthonormale de $\mathbb{R}^2$, il vient pour M_0 et M_1 2 points de Γ de paramètres $\theta_0, \theta_1 \in I$ tels que $\theta_0 \leqslant \theta_1$,

$$\ell(\widehat{M_0M_1}) = \int_{\theta_0}^{\theta_1} \sqrt{\rho^2(\theta) + (\rho'(\theta))^2}$$

Abscisse curviligne : Soit (I, f) une courbe paramétrée plane de classe $\mathcal{C}^1$.
On appelle abscisse curviligne de l'arc paramétré (I, f) toute application $\sigma : I \to \mathbb{R}$ qui soit une primitive sur I de la fonction continue $t \mapsto \|\overrightarrow{f'(t)}\|$. Dans ce cas :

- σ de classe $\mathcal{C}^2$ sur I et $\forall t \in I$, $\sigma'(t) = \|\overrightarrow{f'(t)}\|$ ce qu'on note : $\dfrac{d\sigma}{dt} = \|\overrightarrow{f'(t)}\|$.
- $\exists\ a \in I$, $\forall t \in I$, $\sigma(t) = \displaystyle\int_a^t \|\overrightarrow{f'(u)}\|du$ (on dit que σ est l'abscisse curviligne d'origine $M(a)$).

D'après le théorème précédent, on a pour σ une abscisse curviligne et $t_0 \leqslant t_1 \in I$, $\ell(\widehat{M_0M_1}) = \sigma(t_1) - \sigma(t_0)$.

Théorème : Abscisse curviligne : Soit σ une abscisse surviligne de (I, f) une courbe paramétrée de classe $\mathcal{C}^1$ régulière. Alors :

- σ est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme croissant de I sur $J = \sigma(I)$.
- si on pose $g = f \circ \sigma^{-1}$, (J, g) est un paramétrage admissible (de même orientation) de Γ.
- $\forall x \in J$, $\|\overrightarrow{g'(s)}\| = 1$

Interprétation : l'arc (J, g) parcourt le support Γ avec une vitesse numérique égale à 1.

Repère de Serret-Frénet : On considère une courbe $\Gamma = (I, f)$ de classe $\mathcal{C}^1$ que l'on paramètre par l'abscisse curviligne (J, g).
Soit M une point de Γ de paramètre t (respectivement s) pour le paramétrage (I, f) (respectivement (J, g)) i.e. $\overrightarrow{OM} = f(t) = g(s)$.
On définit le vecteur $\overrightarrow{T}$ par $\overrightarrow{T} = \dfrac{d\overrightarrow{OM}}{ds}$.
D'après le théorème de l'abscisse curviligne, $\overrightarrow{T}$ est un vecteur unitaire et $\overrightarrow{T} = \dfrac{\overrightarrow{f'(t)}}{\|\overrightarrow{f'(t)}\|} = \dfrac{\overrightarrow{f'(t)}}{\sigma'(t)}$, ce que l'on note $\overrightarrow{T} = \dfrac{d\overrightarrow{OM}}{dt} \times \dfrac{dt}{ds}$.
La droite $M + Vect(\overrightarrow{T})$ est la tangente à Γ au point M.
Soit $\overrightarrow{N}$ l'image de $\overrightarrow{T}$ par la rotation linéaire d'angle $\dfrac{\pi}{2}[2\pi]$: $\overrightarrow{N} = r_{\pi/2}(\overrightarrow{T})$.

Le repère $\left\{M, \overrightarrow{T}, \overrightarrow{N}\right\}$ est appelé repère de Serret-Frénet de Γ au point M.
Ce repère est un repère orthonormal direct mobile attaché au point M.

Courbure - Rayon de courbure : On suppose mainteneant que $\Gamma = (I, f)$ est une courbe paramtrée régulière de classe $\mathcal{C}^k$ avec $k \geqslant 2$.
On note (J, g) un paramétrage de Γ par l'abscisse curviligne.
Les fonctions $\left| \begin{array}{ccc} J & \to & \mathbb{R}^2 \\ s & \mapsto & \overrightarrow{T}(s) \end{array} \right.$ et $\left| \begin{array}{ccc} J & \to & \mathbb{R}^2 \\ s & \mapsto & \overrightarrow{N}(s) \end{array} \right.$ sont, au vu de leur définition, de classe $\mathcal{C}^{k-1}$ sur J avec de plus, $\forall s \in J$, $\|\overrightarrow{T}(s)\| = 1$.
D'après le théorème dit de relèvement (admis), il existe une fonction α de classe $\mathcal{C}^{k-1}$ sur J telle que :
$\forall s \in J$, $\overrightarrow{T}(s) = \cos(\alpha(s))\vec{\imath} + \sin(\alpha(s))\vec{\jmath}$ et donc $\overrightarrow{N}(s) = -\sin(\alpha(s))\vec{\imath} + \cos(\alpha(s))\vec{\jmath}$.
$\forall s \in J$, $\alpha(s)$ est une mesure de l'angle de vecteurs $(\vec{\imath}, \overrightarrow{T})$.
Soit $M = M(s)$ un point de Γ.
On appelle courbure en $M(s)$ le réel $\gamma(s) = \dfrac{d\alpha}{ds}(s)$.
Si $\gamma(s) \neq 0$, on apelle rayon de courbure en $M(s)$ le réel $R(s) = \dfrac{1}{\gamma(s)}$.
Interprétation : la courbure caractérise la vitesse de variation de la direction du vecteur tangent $\overrightarrow{T}$.

Formules de Frénet : $\dfrac{d\overrightarrow{T}}{ds} = \gamma\overrightarrow{N}$ et $\dfrac{d\overrightarrow{N}}{ds} = -\gamma\overrightarrow{T}$.

Point birégulier : Le point $M(s)$ est birégulier si et seulement si $\gamma(s) \neq 0$.
Dans ce cas, les formules de Frénet s'écrivent : $\dfrac{d\overrightarrow{T}}{ds} = \dfrac{\overrightarrow{N}}{R}$ et $\dfrac{d\overrightarrow{N}}{ds} = -\dfrac{\overrightarrow{T}}{R}$.

Développée : On définit le centre de courbure C de Γ au point A par $C = M + R\overrightarrow{N}$.
Si Γ est birégulier (i.e. tous les points de Γ sont biréguliers), on appelle développée de Γ le lieu des centres de courbures de Γ.

2.15 Intégrale double - Champ de vecteur

Pavé de $\mathbb{R}^2$: On appelle pavé de $\mathbb{R}^2$ toute partie de $\mathbb{R}^2$ de la forme : $P = \varnothing$ ou $P = [a,b]\times[c,d]$ avec $a \leqslant b$ et $c \leqslant d \in \mathbb{R}$.

Théorème de Fubini : Soit $P = [a,b] \times [c,d]$ un pavé de $\mathbb{R}^2$ et $f : P \to \mathbb{R}$ une fonction de 2 variables continue sur P.
On a alors : $\displaystyle\int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)dy\right) dx = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)dx\right) dy.$

Intégrale sur un pavé : Soit $P = [a,b] \times [c,d]$ un pavé de $\mathbb{R}^2$ et $f : P \to \mathbb{R}$ une fonction de 2 variables continue sur P.
On appelle intégrale de f le pavé P le réel :

$$\int\int_P f(x,y)dxdy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)dy\right) dx = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)dx\right) dy$$

Cas des variables séparées : Soit $h : [a,b] \to \mathbb{R}$ et $g : [c,d] \to \mathbb{R}$ 2 fonctions d'une variables continues sur $[a,b]$ et $[c,d]$.
On note $P = [a,b] \times [c,d]$ et $f : \begin{array}{ccc} P & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & h(x)g(y) \end{array}$.
On a alors : $\displaystyle\int\int_P f(x,y)dxdy = \left(\int_a^b h(x)dx\right) \times \left(\int_c^d g(y)dy\right).$

Compacte simple : Une partie $\mathcal{D}$ de $\mathbb{R}^2$ est appelée compact simple

en x : lorsque $\mathcal{D} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | a \leqslant x \leqslant b \text{ et } \varphi_1(x) \leqslant y \leqslant \varphi_2(x)\}$ où $a,b \in \mathbb{R}$, $a \leqslant b$, et $\varphi_1, \varphi_2 : [a,b] \to \mathbb{R}$ 2 fonctions sur $[a,b]$.

en y : lorsque $\mathcal{D} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | c \leqslant y \leqslant d \text{ et } \psi_1(y) \leqslant x \leqslant \psi_2(y)\}$ où $c,d \in \mathbb{R}$, $c \leqslant d$, et $\psi_1, \psi_2 : [c,d] \to \mathbb{R}$ 2 fonctions sur $[c,d]$.

Intégration sur un compact simple : Soit $\mathcal{D}$ un compact simple de $\mathbb{R}^2$ et $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ de 2 variables continue sur $\mathcal{D}$.

- Si $\mathcal{D}$ compact simple en x, on appelle intégrale double définie sur $\mathcal{D}$ le réel :
  $\displaystyle\int\int_{\mathcal{D}} f(x,y)dxdy = \int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy\right) dx.$
- Si $\mathcal{D}$ compact simple en y, on appelle intégrale double définie sur $\mathcal{D}$ le réel :
  $\displaystyle\int\int_{\mathcal{D}} f(x,y)dxdy = \int_c^d \left(\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)dx\right) dy.$

Théorème de Fubini : Si $\mathcal{D}$ est un compact simple en x et en y, alors mes 2 définitions précédentes donnent la même valeur.

Aire : Soit $\mathcal{D}$ un compact simple de $\mathbb{R}^2$. On appelle aire de $\mathcal{D}$ le réel : $\displaystyle\mathscr{A}(\mathcal{D}) = \int\int_{\mathcal{D}} 1dxdy.$

Propriétés de l'intégrale double sur un compact simple :

Linéarité de l'intégrale double : Soit $\mathcal{D}$ un compact simple de $\mathbb{R}^2$ et $f,g : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ continues sur $\mathcal{D}$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.
On a $\displaystyle\int\int_{\mathcal{D}} (\alpha f(x,y) + \beta g(x,y))\, dxdy = \alpha \int\int_{\mathcal{D}} f(x,y)dxdy + \beta \int\int_{\mathcal{D}} g(x,y)dxdy.$

Coirssance de l'intégrale : Soit $\mathcal{D}$ un compact simple de $\mathbb{R}^2$ et $f, g : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ continues sur $\mathcal{D}$. Si $\forall x, y \in \mathcal{D}$, $f(x,y) \leqslant g(x,y)$, alors $\displaystyle\int\int_{\mathcal{D}} f(x,y)dxdy \leqslant \int\int_{\mathcal{D}} g(x,y)dxdy$.

Relation d'additivité : Soit $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ 2 compacts simples de $\mathbb{R}^2$ tel que $\mathcal{D} = \mathcal{D}_1 \cup \mathcal{D}_2$ soit un compact simple de $\mathbb{R}^2$ et $\mathcal{D}_1 \cap \mathcal{D}_2$ soit vide ou le support d'une courbe paramétrée Γ.
Soit $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ continue.
On a lors $\displaystyle\int\int_{\mathcal{D}} f(x,y)dxdy = \int\int_{\mathcal{D}_1} f(x,y)dxdy + \int\int_{\mathcal{D}_2} f(x,y)dxdy$.

Théorème de changement de variables : SOit $\mathcal{D}$ et Δ 2 compacts simples de $\mathbb{R}^2$.
Soit $G : \begin{array}{ccc} \Delta & \to & \mathcal{D} \\ (u,v) & \mapsto & (\varphi(u,v), \psi(u,v)) \end{array}$.
Hypothèse : G est $\mathcal{C}^1$ de Δ sur $\mathcal{D}$.
Soit $f : \begin{array}{ccc} \mathcal{D} & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & f(x,y) \end{array}$.
On a lors : $\displaystyle\int\int_{\mathcal{D}} f(x,y)dxdy = \int\int_{\Delta} f(\varphi(u,v), \psi(u,v)) \left|Det\left(J_G(u,v)\right)\right| dudv$
avec J_G matrice jacobienne de G : $J_G(u,v) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial\varphi}{\partial u}(u,v) & \dfrac{\partial\varphi}{\partial v}(u,v) \\ \dfrac{\partial\psi}{\partial u}(u,v) & \dfrac{\partial\psi}{\partial v}(u,v) \end{pmatrix}$.

Théorème de changement de variables en coordonnées polaires : On reprend les notation du théorème avec $g : \begin{array}{ccc} \Delta & \to & \mathcal{D} \\ (\rho,\theta) & \mapsto & (\rho\cos\theta, \rho\sin\theta) \end{array}$.
$J_G(\rho,\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\rho\sin\theta \\ \sin\theta & \rho\cos\theta \end{pmatrix}$. $Det(J_G(\rho,\theta)) = \rho$.
Donc $\displaystyle\int\int_{\mathcal{D}} f(x,y)dxdy = \int\int_{\Delta} f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)|Det(J_G(\rho,\theta))|d\rho d\theta = \int\int_{\Delta} f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)|\rho|d\rho d\theta$.

Champ de vecteurs : Soit $\mathcal{U}$ un ouvert de $\mathbb{R}^2$. On appelle champ de vecteur sur $\mathcal{U}$ toute application $\overrightarrow{V} : U \to \mathbb{R}^2$. En notant P et Q les applications coordonnées de $\overrightarrow{V}$, on a :
$P, Q : U \to \mathbb{R}$ et $\forall (x,y) \in \mathcal{U}$, $\overrightarrow{V}(x,y) = (P(x,y), q(x,y))$.

Potentiel : Soit $\overrightarrow{V} : \mathcal{U} \to \mathbb{R}^2$ un champ de vecteurs. On dit que $\overrightarrow{V}$ dérive d'un potentiel lorsqu'il existe $f : U \to \mathbb{R}$ fonction de 2 variables de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathcal{U}$ telle que $\overrightarrow{V} = \overrightarrow{grad}\, f$.
Si $\overrightarrow{V}$ dérive d'un potentiel, alors $\forall (x,y) \in \mathcal{U}$, $\dfrac{\partial P}{\partial y}(x,y) = \dfrac{\partial Q}{\partial x}(x,y)$.

Ouvert étoilé : Un ouvert $\mathcal{U}$ de $\mathbb{R}^2$ est dit étoilé lorsque : $\exists M_0 \in \mathcal{U}$, $\forall M \in \mathcal{U}$, $[M_0, M] \subset \mathcal{U}$.

Théorème de Poincaré : Soit $\mathcal{U}$ un ouvert étoilé et $\overrightarrow{V} = (P,Q) : \mathcal{U} \to \mathbb{R}^2$ un champ de vecteurs de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathcal{U}$.
Si $\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x}$, alors $\overrightarrow{V}$ dérive d'un potentiel.

Intégrale curviligne : Soit $\mathcal{U}$ un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et $\overrightarrow{V} = (P,Q) : \mathcal{U} \to \mathbb{R}^2$ un champ de vecteur continu sur $\mathcal{U}$.
Soit Γ une courbe paramétrée de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,b]$ à valeurs dans $\mathcal{U}$. (Plus précisement, on a $\Gamma \subset \mathcal{U}$ avec Γ qui est le support de la courbe $([a,b], g)$ où $g : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ telle que

$g(t) = (x(t), y(t))$.
On appelle circulation du champ $\overrightarrow{V}$ sur Γ le réel :

$$\int_\Gamma \overrightarrow{V} = \int_a^b (P(x(t),y(t))x'(t) + Q(x(t),y(t))y'(t))\,dt$$

Propriétés de l'intégrale curviligne :

Cas où le champ de vecteurs $\overrightarrow{V}$ dérive d'un potentiel : $\overrightarrow{V} = \overrightarrow{grad}\,(f) = \left(\dfrac{\partial f}{\partial x}, \dfrac{\partial f}{\partial y}\right)$

i.e. $P = \dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $Q = \dfrac{\partial f}{\partial y}$.

La circulation devient : $\displaystyle\int_\Gamma \overrightarrow{V} = \int_a^b \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x(t),y(t))x'(t) + \frac{\partial f}{\partial y}(x(t),y(t))y'(t)\right) dt$

$\displaystyle = \int_a^b (t \mapsto f(x(t),y(t)))'dt = f(M(b)) - f(M(a))$.

La circulation ne dépend pas du chemin Γ mais seulement de la valeur de f aux extremum du chemin.

Autre notation : $\displaystyle\int_\Gamma \overrightarrow{V}$ se note aussi $\displaystyle\int_{\widehat{AB}} Pdx + Qdy$.

$\displaystyle\int_{\widehat{BA}} Pdx + Qdy = -\int_{\widehat{AB}} Pdx + Qdy$.

Paramétrage admissible : Soit $\overrightarrow{V} = (P,Q)$ champ de vecteurs. Γ support de la courbe paramétrée $g : \begin{array}{ccc} [a,b] & \to & \mathbb{R}^2 \\ t & \mapsto & (x(t),y(t)) \end{array}$

$\displaystyle\int_\Gamma \overrightarrow{V} = \int_a^b (P(x(t),y(t))x'(t) + Q(x(t),y(t))y'(t))\,dt$.

On peut montrer que $\displaystyle\int_\Gamma \overrightarrow{V}$ est indépendante du paramétrage admissible de Γ i.e. Γ admet aussi un paramétrage $h : \begin{array}{ccc} [c,d] & \to & \mathbb{R}^2 \\ u & \mapsto & (X(u),Y(u)) \end{array}$ avec h paramétrage admissible de g.

On a aussi : $\displaystyle\int_\Gamma \overrightarrow{V} = \int_c^d (P(X(u),Y(u))X'(u) + Q(X(u),Y(u))Y'(u))\,du$.

Théorème de Green-Riemann : Soit $\mathcal{D}$ un compact simple de $\mathbb{R}^2$ donc le contour Γ est un arc paramétré de classe $\mathcal{C}^1$ (sauf en des points isolés), fermé et orienté dans le sens trigonométrique.
Soit $\overrightarrow{V} = (P,Q)$ un champ de vecteurs sur un ouvert $\mathcal{U}$ de $\mathbb{R}^2$ contenant $\mathcal{D}$.
On a : $\displaystyle\int_\Gamma Pdx + Qdy = \int\int_{\mathcal{D}} \left(\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial P}{\partial y}(x,y)\right) dxdy$.

3 Algèbre générale

3.1 Arithmétique des entiers relatifs

Division euclidienne dans $\mathbb{N}$: Soit $a \in \mathbb{N}$ et $b \in \mathbb{N}^\star$.
Il existe un unique couple $(q, r) \in \mathbb{N}^2$ tel que : $\left\{ \begin{array}{l} a = b \cdot q + r \\ \text{et } \leqslant r \leqslant b - 1 \end{array} \right.$

Division euclidienne dans $\mathbb{Z}$: Soit $a \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{Z}^\star$.
Il existe un unique couple $(q, r) \in \mathbb{Z}^2$ tel que : $\left\{ \begin{array}{l} a = b \cdot q + r \\ \text{et } \leqslant r \leqslant |b| - 1 \end{array} \right.$
q et r sont appelé quotient et reste de la division euclidienne de a par b tandis que a est appelé dividende et b diviseur.

Sous-groupes de $(\mathbb{Z}, +)$: Pour $n \in \mathbb{Z}$ fixé, on note $n\mathbb{Z} = \{nk | k \in \mathbb{Z}\}$: ensemble des multiples de n.
$(n\mathbb{Z}, +)$ est un sous groupe de $(\mathbb{Z}, +)$.
Les sous-groupes de $(\mathbb{Z}, +)$ sont excatement les ensembles de la forme $n\mathbb{Z}$.

Relation de divisibilité : Soit $a, b \in \mathbb{Z}$. On dit que a divise b lorsqu'il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $b = ak$. On note alors « $a|b$ ».

- Cette relation sur $\mathbb{Z}$ est réflexive, transitive mais n'est pas antisymétrique. En effet, $\big[a|b$ et $b|a\big] \Rightarrow \big[a = b$ ou $a = -b\big]$.
- La relation « $|$ »est une relation d'ordre sur $\mathbb{N}$.
- Combinaison linéaire : si $d|a$ et $d|b$ et $u, v \in \mathbb{Z}$, alors $d|au + bv$.
- Produit : si $a|b$ et $c|d$, alors $ac|bd$ Si $a|b$ et $k \in \mathbb{N}$, alors $a^k|b^k$.
- Multiplication par un entier non nul : soit $d \neq 0$. On a $\big(a|b$ ssi $ad|bd\big)$

$a|b$ ssi $b\mathbb{Z} \subset a\mathbb{Z}$.

Théorème fondamental : sous-groupes de $(\mathbb{Z}, +)$:
Soit $(H, +)$ un sous-groupe de $(\mathbb{Z}, +)$.
Alors il existe un unique entier $a \in \mathbb{N}$ tel que $H = a\mathbb{Z}$.

Relation de congruence : Soit $a, b \in \mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{Z}$. On dit que a est congru à b modulo n lorsque $n|b - a$. On note $a \equiv b[n]$.
- La relation « $\equiv \ [n]$ »est réflexive, symétrique et transitive.
- Soit a, b, c et $din\mathbb{Z}$ tel que $a \equiv b[n]$ et $c \equiv d[n]$.
  On a : $a + c \equiv b + d[n]$ $ac \equiv bd[n]$ $\forall k \in \mathbb{N}$, $a^k \equiv b^k[n]$ $a \equiv b[n]$ ssi $a \equiv bm[mn]$, $m \neq 0$.

PPCM : Soit $a, b \in \mathbb{Z}$. $m = PPCM(a, b)$ ssi $\left\{ \begin{array}{l} m \in \mathbb{N} \\ m\mathbb{Z} = a\mathbb{Z} \cap b\mathbb{Z} \end{array} \right.$.
Soit $k \neq 0$. $PPCM(ka, kb) = |k| \cdot PPCM(a, b)$.

Ensemble $a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z}$: Soit $a, b \in \mathbb{Z}$. On note $a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z} = \{au + bv | u, v \in \mathbb{Z}\}$.
$a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z}$ est un sous-groupe de $(\mathbb{Z}, +)$.

PGCD : Soit $a, b \in \mathbb{Z}$. $d = PGCD(a,b)$ ssi $\begin{cases} d \in \mathbb{N} \\ a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z} = d\mathbb{Z} \end{cases}$.
Soit $k \neq 0$. $PGCD(ka, kb) = |k| \cdot PGCD(a,b)$.

Nombres premiers entre eux : Soit $a, b \in \mathbb{Z}$.
On dit que a et b sont premiers entre eux lorsque $PGCD(a,b) = 1$.

Théorème de Bézout : Soit $a, b \in \mathbb{Z}$. On a a et b sont premiers entre eux ssi $\big(\exists\ u, v \in \mathbb{Z}$ tels que $au + bv = 1\big)$.

Conséquences du théorème :

- Si $\begin{cases} a \text{ est premier avec } b \\ \text{et } a \text{ est premier avec } c \end{cases}$, alors a est remier avec bc.
- Théorème de Gauss : Si $\begin{cases} a \text{ est premier avec } bc \\ \text{et } a \text{ est premier avec } b \end{cases}$, alors a divise c.

Propriétés liant le PGCD et le PPCM :

- Soit $a, b \in \mathbb{Z}$. On considère $d \in \mathbb{N}^\star$ un diviseur commun à a et b i.e. $a = da_1$ et $b = db_1$. Dès lors, $d = PGCD(a,b)$ ssi a_1 et b_1 sont premiers entre eux.
- Soit $a, b \in \mathbb{Z}$. On considère $m \in \mathbb{N}^\star$ un multiple commun à a et b i.e. $a = ma_1$ et $b = mb_1$. Dès lors, $m = PPCM(a,b)$ ssi a_1 et b_1 sont premiers entre eux.
- $\forall a, b \in \mathbb{Z}$, $PGCD(a,-b) = PGCD(a,b) \qquad PPCM(a,-b) = PPCM(a,b) \qquad PGCD(a,b) \times PGCD(b,a)$
- $\forall a, b \in \mathbb{Z}$, $PGC(a,b) \times PPCM(a,b) = |ab|$.

Forme irréductible d'un nombre rationnel : Soit $r \in \mathbb{Q}$ un nombre rationnel.
Alors il existe un unique couple $(p,q) \in \mathbb{Z}^2$ tel que : $r = \dfrac{p}{q}$ ET $q \in \mathbb{N}^\star$ ET p et q sont premiers entre eux.
On parle d'écriture sous forme irréductible du rationnel r.

Idée de l'algorithme d'Euclide : Si on peut écrire $a = bq + r$ avec $q, r \in \mathbb{Z}$, alors $PGCD(a,b) = PGCD(b,r)$.

Nombres premiers : Un nombre $n \in \mathbb{N}$ est dit premier lorsqu'il admet exactement 2 diviseurs dans $\mathbb{N}$: 1 et lui-même.

Propriétés des nombres premiers :

- Soit $a \in \mathbb{Z}$ et p un nombre premier tel que p ne divise pas a. Alors a et p sont premiers entre eux.
- Soit $a, b \in \mathbb{Z}$ et p un nombre premier tel que $p|ab$. Alors $\big(p|a$ ou $p|b\big)$.
- Soit $p, p_1, p_2, \dots, p_n$ des nombres premiers. Si $p|p_1 \times p_2 \times \ldots \times p_n$, alors $\exists\ i \in [\![1, n]\!]$ tel que $p = p_i$.
- Tout entier $n \geqslant 2$ admet un diviseur premier.
- Théorème d'Euclide : L'ensemble des nombre premiers est infini.
- Crible d'Érathostène : Soit $n \in Z$. On aimerait savoir si n est premier. Si $n \geqslant 2$ et n'est pas premier, alors n admet un diviseur premier p tel que $p < \sqrt{n}$.

Décomposition en facteurs premiers : Tout nombre entier $n \geqslant 2$ peut se décomposer de manière unique à l'ordre près comme produit de facteurs premiers.

Conséquence de cette décomposition sur le PGCD et le PPCM : Soit $a, b \in \mathbb{N}$ tels que $a, b \geqslant 2$.
On note $\{p_1, p_2; \ldots, p_n\}$ l'ensemble des nombres premiers qui divise a et b.
On écrit $a = {p_1}^{\alpha_1} \times {p_2}^{\alpha_2} \times \ldots \times {p_n}^{\alpha_n}$ et $b = {p_1}^{\beta_1} \times {p_2}^{\beta_2} \times \ldots \times {p_n}^{\beta_n}$ avec les $\alpha_1, \beta_j \in \mathbb{N}$.
On a :

- $PGCD(a, b) = {p_1}^{min(\alpha_1, \beta_1)} \times \ldots \times {p_n}^{min(\alpha_n, \beta_n)}$
- $PPCM(a, b) = {p_1}^{max(\alpha_1, \beta_1)} \times \ldots \times {p_n}^{max(\alpha_n, \beta_n)}$

4 Algèbre linéaire

4.1 Espaces vectoriels

Définition : Soit E un sensemble et $\mathbb{K}$ un coprs (qui sera dans la plupart des cas $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). Soit $\oplus$ une loi de composition interne sur E, soit $\bullet$ une loi de composition externe sur E.
On dit que $(E, \oplus, \bullet)$ a une structure d'espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ lorsque :
- $(E, \oplus)$ est un groupe commutatif ;
- On a les quatre propriétés suivantes : $\forall\ \alpha, \beta \in \mathbb{K}$, $\forall\ x, y \in E$,
  (a) $\alpha \bullet (x \oplus y) = \alpha \bullet x \oplus \alpha \bullet y$
  (b) $(\alpha + \beta) \bullet x = \alpha \bullet x \oplus \beta \bullet x$
  (c) $\alpha \bullet (\beta \bullet x) = (\alpha\beta) \bullet x = \beta \bullet (\alpha \bullet x)$
  (d) $1 \bullet x = x$

Espace vectoriel produit : Soit $E_1, E_2, \ldots, E_n$ des espace vectoriels sur un même corps $\mathbb{K}$. Alors on peut définir une structure d'espace vectoriel sur le produit cartésien $E_1 \times E_2 \times \ldots \times E_n$ avec pour $(x_1, \ldots, x_n)$ et $(y_1, \ldots, y_n) \in E_1 \times \ldots \times E_n$ et $\lambda \in \mathbb{K}$,

définition de + : $(x_1, \ldots, x_n) + (y_1, \ldots, y_n) = (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n)$;

Définition de $\bullet$: $\lambda \bullet (x_1, \ldots, x_n) = (\lambda x_1, \ldots, \lambda x_n)$;

Vecteur nul : $0_{E_1 \times \ldots \times E_n} = (0_{E_1}, \ldots, 0_{E_n})$.

Calcul dans un espac vectoriel : Soit $(E, +, \cdot)$ un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$. $\forall\ x \in E, \forall\ \alpha \in \mathbb{K}$, on a :
- $\alpha \cdot 0_E = 0_E$;
- $0 \cdot x = 0_E$;
- $(-\alpha) \cdot x = -(\alpha \cdot x) = \alpha \cdot (-x)$
- $[\alpha \cdot x = 0_E \Rightarrow (\alpha = 0 \text{ ou } x = 0_E)]$.

Structure d'algèbre : Soit E un ensemble et $\mathbb{K}$ un corps.
Soit $+$ et $\times$ deux lois de compositions internes sur E.
Soit $\bullet$ une loi de composition externe sur E.
On dit que $(E, +, \bullet, \times)$ a une structure d'algèbre sur $\mathbb{K}$ lorsque :
1. $(E, +, \times)$ est un anneau ;
2. $(E, +, \bullet)$ est une espace vectoriel sur $\mathbb{K}$;
3. $\forall\ x, y \in E$, $\forall\ \lambda \in \mathbb{K}$, $\lambda \bullet (x \times y) = (\lambda \bullet x) \times y = x \times (\lambda \bullet y)$.

Si de plus, $\times$ commute, on parle d'algèbre commutative.

Sous espace vectoriel : Soit $(E, +, \cdot)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.
Soit F une partie non vide de E.
On dit que $(F, +, \cdot)$ est un sous-espace vectoriel de $(E, +, \cdot)$ lorsque la restriction des lois + et $\cdot$ confèrent à F une structure d'espace vectoriel sur $\mathbb{K}$.

Caractérisation des sous-espaces vectoriels : Soit $(E, +, \cdot)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Soit F une partie non vide de E. On a F sous-espace vectoriel de E si et seulement si :
- $0_E \in F$
- $\forall\ \alpha, \beta \in \mathbb{K}$, $\forall\ x, y \in F$, $\alpha x + +\beta y \in F$ (F stable par combinaison linéaire).

5 Géométrie

5.1 Conique

Définition d'une conique :
Soit :
- F un point du plan ;
- $\mathcal{D}$ une droite du plan ;
- e un réel strictement positif.

On appelle conique de foyer F, de directrice $\mathcal{D}$ et d'excentricité e l'ensemble, noté $\mathcal{C}$, des points M du plan tels que : $MF = e \times d(M, \mathcal{D})$.
$\mathcal{C} = \{M | MF = e \times d(M, \mathcal{D})\}$

Équation polaire et cartésienne d'une conique : Soit $\mathcal{C}$ une conique de foyer F, de directrice $\mathcal{D}$, d'excentricité e.
Soit $\mathcal{R} = (F, \vec{i}, \vec{j})$ un R.O.N.D. ou $\mathcal{D}$ admet pour équation cartésienne $x = d$ avec $d = d(F, \mathcal{D})$.

- Alors, relativement à ce repère $\mathcal{R}$, la conique $\mathcal{C}$ admet une équation polaire du type :

$$\rho(\theta) = \frac{p}{1 + e \cdot \cos\theta}$$

  où $p = ed$ est appelé le paramètre de la conique $\mathcal{C}$.

- Alors, relativement à ce repère $\mathcal{R}$, la conique $\mathcal{C}$ admet une équation cartésienne du type :

$$x^2 + y^2 = e^2(x - d)^2$$

Cas de la parabole $\mathcal{P}$ $(e = 1)$:
Soit S le point de coordonnées $(\frac{p}{2}, 0)$ dans $\mathcal{R}$.
La parabole de paramètre p a pour équation dans le repère (S, x, y) :
- $y^2 = -2px$ si $\mathcal{D}$ admet $x = d$ comme équation dans $(F, \vec{i}, \vec{j})$;
- $y^2 = 2px$ si $\mathcal{D}$ admet $x = -d$ comme équation dans $(F, \vec{i}, \vec{j})$.

Représentation paramétrique : $M \in \mathcal{P} \Leftrightarrow \exists t \in \mathbb{R}$ tel que $\left| \begin{array}{l} x = p\frac{t^2}{2} \\ y = pt \end{array} \right.$.
Tangente à une parabole : soit M_0 de coordonnées (x_0, y_0) dans $\mathcal{R} = (S, \vec{i}, \vec{j})$.
Alors la tangente T_{M_0} à $\mathcal{P}$ en M_0 admet pour equation cartésienne dans $\mathcal{R}$: $yy_0 = p(x + x_0)$

Cas de de l'ellipse $\mathcal{E}$ $(0 < e < 1)$:
Posons $a = \dfrac{ed}{1 - e^2}$, $b = \dfrac{ed}{\sqrt{1 - e^2}}$ et $c = \dfrac{e^2 d}{1 - e^2}$.
Soit O le point de coordonnées $(-c, 0)$ dans $\mathcal{R}$.
Soit $\mathcal{R}' = (o, \vec{i}, \vec{j})$ un nouveau repère.
Dans le repère $\mathcal{R}'$, l'ellipse $\mathcal{E}$ admet pour équation cartésienne : $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ et la directrice $\mathcal{D}$ a pour équation cartésienne $x = d + c = d + \dfrac{e^2 d}{1 - e^2}$ i.e. $\mathcal{D} : x = \dfrac{a^2}{c}$ ou $x = \dfrac{a}{e}$.
Représentation paramétrique trigonométrique : $M \in \mathcal{E} \Leftrightarrow \exists t \in \mathbb{R}$ tel que $\left| \begin{array}{l} x = a\cos t \\ y = b\cos t \end{array} \right.$.
Représentation paramétrique rationnelle : soit A' le sommet de $\mathcal{E}$ de coordonnées $(-a, 0)$.
$M \in \mathcal{E} \setminus \{A'\} \Leftrightarrow \exists! t \in \mathbb{R}$ tel que $\left| \begin{array}{l} x = a\frac{1-u^2}{1+u^2} \\ y = b\frac{2u}{1+u^2} \end{array} \right.$.

Cas de de l'hyperbole $\mathcal{H}$ $(e<1)$:
Posons $a=\dfrac{ed}{e^2-1}$, $b=\dfrac{ed}{\sqrt{e^2-1}}$ et $c=\dfrac{e^2d}{e^2-1}$.
Soit O le point de coordonnées $(c,0)$ dans $\mathcal{R}$.
Soit $\mathcal{R}'=(o,\vec{i},\vec{j})$ un nouveau repère.
Dans le repère $\mathcal{R}'$, l'hyperbole $\mathcal{H}$ admet pour équation cartésienne : $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ et la directrice $\mathcal{D}$ a pour équation cartésienne $x=-(c-d)=d-\dfrac{e^2d}{e^2-1}=-\dfrac{d}{e^2-1}$ i.e. $\mathcal{D}:x=-\dfrac{a^2}{c}$ ou $x=-\dfrac{a}{e}$.
$\mathcal{H}$ est la réunion de 2 branches $\mathcal{H}_1$ et $\mathcal{H}_2$. $\mathcal{H}_1$ est contenue dans le demi-plan $x>0$.
Représentation paramétrique :

- $M\in\mathcal{H}_1\Leftrightarrow\exists t\in\mathbb{R}$ tel que $\left|\begin{array}{l}x=a\mathrm{ch}\,(t)\\ y=b\mathrm{sh}\,(t)\end{array}\right.$;
- $M\in\mathcal{H}_1\Leftrightarrow\exists t\in\mathbb{R}$ tel que $\left|\begin{array}{c}x=-a\mathrm{ch}\,(t)\\ y=b\mathrm{sh}\,(t)\end{array}\right.$.

Courbes du second degré : Soit $\mathcal{C}$ une courbe du 2$^{\text{e}}$ degré d'équation dans $\mathcal{R}$:
$ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f=0$ et de discriminant $\Delta=b^2-4ac$.

- si $\Delta=0$, alors $\mathcal{C}$ est soit vide, soit une droite, soit 2 droites parallèles, soit une parabole i.e. $\mathcal{C}$ est du genre parabole ;
- si $\Delta<0$, alors $\mathcal{C}$ est soit vide, soit un point, soit une ellipse, soit un cercle i.e. $\mathcal{C}$ est du genre ellipse ;
- si $\Delta<0$, alors $\mathcal{C}$ est soit soit la réunion de 2 droitees sécantes, soit une hyperbole i.e. $\mathcal{C}$ est du genre hyperbole.