Fiche électromagnétisme

Postulats : énoncés des équations : Objets : $\overrightarrow{E}(M,t)$, $\overrightarrow{B}(M,t)$, $\rho(M,t)$, $\overrightarrow{j}(M,t)$ vérifient les quatres équations suivantes :

$$div\,\overrightarrow{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \text{ : Maxwell-Gauss}$$

$$\overrightarrow{rot}\,\overrightarrow{E} = -\frac{\partial \overrightarrow{B}}{\partial t} \text{ : Maxwell-Faraday}$$

$$div\,\overrightarrow{B} = 0 \text{ : Maxwell flux}$$

$$\overrightarrow{rot}\,\overrightarrow{B} = \mu_0 \cdot \left(\overrightarrow{j} + \varepsilon_0 \cdot \frac{\partial \overrightarrow{E}}{\partial t} \right) \text{ : Maxwell ampère}$$

Forces de Lorentz : q, $\overrightarrow{v}$, $\overrightarrow{E}$ et $\overrightarrow{B}$:

$$\overrightarrow{F_L} = q \cdot \left(\overrightarrow{E} + \overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{B} \right)$$

Postulat de la conservation de la charge électrique : La charge électrique à l'intérieur d'une surface fermée isolée est constante.
La variation de charge d'une surface fermée est due aux charges entrantes ou sortantes.

$$div\,\overrightarrow{j} + \frac{\partial Q}{\partial t} = 0 \text{ : équation locale de conservation de la charge électrique}$$

Relation de passage : À chaque instant, ce sont les même qu'en électrostatique et magnétostatique.

Potentiel :

$$\overrightarrow{E} = -\overrightarrow{grad}\,V - \frac{\partial \overrightarrow{A}}{dt}$$

Dans le cadre de la jauge de Lorentz :

$$V(M,t) = \iiint_V \frac{\rho\left(P, t - \frac{PM}{c}\right) \cdot d\tau}{4\pi \cdot \varepsilon_0 \cdot PM}$$

$$\overrightarrow{A}(M,t) = \iiint_V \frac{\mu \cdot \overrightarrow{j}\left(P, t - \frac{PM}{c}\right) \cdot d\tau}{4\pi \cdot PM}$$

Ce sont les potentiels retardés qui traduisent le fait que des modification des charges ou des courants en un point ne se font ressentir aileur qu'après un retard : $\dfrac{PM}{c}$.

ARQS : Approximation des régimes quasi-stationnaires.
Soit T un temps caractéristique des variations temporelle des grandeurs électriques. Si $\tau = \frac{D}{c} \ll T$ avec D la distance caractéritique du circuit à M, alors on ressent les changements quasi-instantanément en M et les lois de l'électromagnétisme sont quaisment celles des champs statiques.

$$div\,\overrightarrow{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

$$\overrightarrow{rot}\,\overrightarrow{E} = -\frac{\partial \overrightarrow{B}}{\partial t}$$

$$div\,\overrightarrow{B} = 0$$

$$\overrightarrow{rot}\,\overrightarrow{B} = \mu_0 \cdot \overrightarrow{j}$$

$$V(M,t) = \iiint_V \frac{\rho\,(P,t) \cdot d\tau}{4\pi \cdot \varepsilon_0 \cdot PM}$$

$$\overrightarrow{A}(M,t) = \iiint_V \frac{\mu_0 \cdot \overrightarrow{j}\,(P,t) \cdot d\tau}{4\pi \cdot PM}$$

$$\overrightarrow{B} = \overrightarrow{rot}\,\overrightarrow{A}$$

$$\overrightarrow{E} = -\overrightarrow{grad}V - \frac{\partial \overrightarrow{A}}{\partial t}$$

Loi de Lenz : Le courant induit s'oppose par ses effets à la cause lui ayant donné naissance.

1 Cas de Neumann

Circuit fixe dans un champs variable.

$$\overrightarrow{E_m} = -\frac{\partial \overrightarrow{A}}{\partial t} \text{ : champ électromoteur}$$

$$e_{\text{ind}} = \oint_{\text{circuit}} \overrightarrow{E_m} \cdot \overrightarrow{dl}$$

$$\phi = \iint_\Sigma \overrightarrow{B} \cdot \overrightarrow{dS}$$

$$e_{\text{ind}} = -\frac{d\phi}{dt} \text{ : relation de Faraday}$$

Phénomène d'auto-induction : Soient un circuit seul parcouru par $I(t)$ et ϕ_{propre} le flux du champ magnétique crée par le circuit à travers lui-même.
ϕ_{propre} est proportionnel à a $I(t)$:

$$\phi_{\text{propre}} = L \cdot I$$

L est appelé inductance propre du circuit.
ϕ est calculé à travers une surface Σ s'appuyant sur le circuit et orientée en prenant comme sens de parcours du circuit celui qyui sert à compter l'intensité positivement.

$$e_{\text{ind}} = -\frac{d\phi}{dt} = -L\frac{dI}{dt}$$

Pour un solénoïde de rayon R, composé de N spires, de longueur l et parcouru par I,

$$\mathcal{E}_{\text{ma}} = \frac{1}{2} \cdot \pi R^2 l \cdot \frac{B_{\text{int}}^2}{\mu_0}$$

Mutuelle inductance : Soient deux circuits filiformes voisins.
$\phi_2 = \phi_{\text{propre},2} + \phi_{1\to 2} = L_2 \cdot I_2 + M_{1\to 2} \cdot I_1$ et $\phi_1 = \phi_{\text{propre},1} + \phi_{2\to 1} = L_1 \cdot I_1 + M_{2\to 1} \cdot I_2$

$$M_{1\to 2} = M_{2\to 1} = M \text{ : théorème de Neumann}$$

M est appelé coefficient de mutuelle induction entre les deux circuits.

Cas volumique : Les équations à résoudre sont :

$$\overrightarrow{j} = \sigma \cdot \overrightarrow{E}$$

$$\overrightarrow{rot}\,\overrightarrow{E} = -\frac{\partial \overrightarrow{B}}{\partial t}$$

$$\overrightarrow{rot}\,\overrightarrow{B} = \mu_0 \cdot \overrightarrow{j}$$

2 Cas de Lorentz

Circuit mobile ou déformable dans un champ stationnaire.

Changement de référentiel : Le conducteur est mobile dans $\mathscr{R}$ mais immobile dans $\mathscr{R}'$.
$\overrightarrow{v}(M)_{/\mathscr{R}} = \overrightarrow{v}(M)_{/\mathscr{R}'} + \overrightarrow{v_e}$

$$\overrightarrow{E'} = \overrightarrow{E} + \overrightarrow{v_e} \wedge \overrightarrow{B}$$

$$\overrightarrow{B'} = \overrightarrow{B}$$

Champ électromoteur :

$$\overrightarrow{E_m} = \overrightarrow{v_{e_{\text{locale}}}} \wedge \overrightarrow{B}$$

$$e_{\text{ind}} = \oint_{\text{circuit}} \overrightarrow{E_m} \cdot \overrightarrow{dl}$$

Loi de Faraday :

$$\phi = \overrightarrow{S} \cdot \overrightarrow{B}$$

$$e_{\text{ind}} = -\frac{d\phi}{dt}$$

3 Énergie électromagnétique

Charge unique : $q, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{E}, \overrightarrow{B}$.

$$\overrightarrow{F_{\text{Lorentz}}} = q\left(\overrightarrow{E} + \overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{B}\right)$$

$$\mathcal{P} = q \cdot \overrightarrow{E} \cdot \overrightarrow{v}$$

Ensemble de charges en mouvement : Distribution $\rho, \overrightarrow{v}$

$$\text{Puissance volumique : } \mathcal{P}_V = \frac{d\mathcal{P}}{d\tau} = \overrightarrow{j} \cdot \overrightarrow{E}$$

Cas d'un conducteur ohmique :

$$\mathcal{P}_V = \rho \cdot j^2$$

Énergie électromagnétique du champ : (On ne se place plus dans le cadre de l'ARQS). Dans le cadre général de l'électromagnétisme, on associe au champ électromagnétique $(\overrightarrow{E}, \overrightarrow{B})$ une densité volumique d'énergie :

$$u_{\text{em}} = \frac{1}{2} \cdot \varepsilon_0 \cdot E^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{B^2}{\mu_0}$$

Vecteur de Poynting :

$$\overrightarrow{\pi} = \frac{\overrightarrow{E} \wedge \overrightarrow{B}}{\mu_0}$$

Signification physique : le flux de $\overrightarrow{\pi}$ à travers une surface orientée est égale à la puissance rayonnée par le champ électromagnétique à travers cette surface (comptée positivement dans le sens de $\overrightarrow{dS}$).

$$\mathcal{P}_{\text{rayonnée}} = \iint_\Sigma \overrightarrow{\pi}(P) \cdot \overrightarrow{dS}$$

Bilan local d'énergie :

$$\frac{\partial u_{\text{em}}}{\partial t} + div\, \overrightarrow{\pi} = -\overrightarrow{j} \cdot \overrightarrow{E}$$