ESTAT Chapitre 0 : Analyse vectorielle

15/12/2011

---

1 Notion de champ

- Champ scalaire : $\begin{cases} \text{champ vectoriel} & \to \text{champ scalaire} \\ M \mapsto V(M) & \end{cases}$.
  Exemple : champ de température.
- Champ vectoriel : $\begin{cases} \text{champ vectoriel} & \to \text{champ vectoriel} \\ M \mapsto \overrightarrow{A}(M) & \end{cases}$.
  Exemples : champ de vitesse d'un fluide en écoulement, $\overrightarrow{B}$ et $\overrightarrow{E}$ (Sup).

On rajoute une dépendance temporelle : $V(M,t)$, $\overrightarrow{A}(M,t)$
Champ uniforme : ne dépend pas de M.
Champ stationnaire : ne dépend pas de t.

2 Circulation d'un champ de vecteur

2.1 Circulation élémentaire

$$d\mathcal{C} = \overrightarrow{A} \cdot \overrightarrow{dl}$$

2.2 Circulation finie

$$\mathcal{C}_{M_1 \to M,;\Gamma} = \int_{M1,\Gamma}^{M_2} \overrightarrow{A}(P) \cdot \overrightarrow{dl}$$

3 Flux d'un champ de vecteurs

3.1 Flux élémentaire

$\overrightarrow{dS}$: vecteur de norme dS, perpendiculaire à dS, orienté arbitrairement.
Le flux élémentaire $d\Phi$ de $\overrightarrow{A}$ à travers $\overrightarrow{dS}$ centré sur P est :

$$d\Phi = \overrightarrow{A}(P) \cdot \overrightarrow{dS}$$

3.2 Flux à travers une surface finie non fermée

Σ est orienté arbitrairement mais de manière continue.

$$\Phi = \iint_{\Sigma} \overrightarrow{A}(P) \cdot \overrightarrow{dS}$$

Cas particulier :
cas d'une surface d'appuyant sur un contour fermé orienté Γ : Σ s'appuye sur Γ.
Alors Γ est orientésuivant la règle du tire-bouchon.
Φ est calculé comme précédement.

3.3 Flux à travers une surface fermée

Surface fermée : définit sans ambiguité un intérieur et un extérieur.
Une telle surface fermée est alors orientée de l'intérieur vers l'extérieur.

$$\Phi = \oiint \overrightarrow{A}(P) \cdot \overrightarrow{dS}$$

4 Les opérateurs

4.1 Gradient

$$\overrightarrow{grad} : \begin{cases} \text{champ scalaire} & \to \text{champ vectoriel} \\ & u \mapsto \overrightarrow{grad}\ u \end{cases}$$

Propriété : $du = \overrightarrow{grad}\ u \cdot \overrightarrow{dl}$.

$$\overrightarrow{grad}\ u(x,y,z) = \left| \begin{array}{l} \dfrac{\partial u}{\partial x} \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} \\ \dfrac{\partial u}{\partial z} \end{array} \right. \quad \overrightarrow{grad}\ u(r,\theta,z) = \left| \begin{array}{l} \dfrac{\partial u}{\partial r} \\ \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial u}{\partial \theta} \\ \dfrac{\partial u}{\partial z} \end{array} \right. \quad \overrightarrow{grad}\ u(r,\theta,\varphi) = \left| \begin{array}{l} \dfrac{\partial u}{\partial r} \\ \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial u}{\partial \theta} \\ \dfrac{1}{r\sin\theta}\dfrac{\partial u}{\partial \varphi} \end{array} \right.$$

Propriétés :
- $\overrightarrow{grad}\ u$ est orthogonal aux surfaces équi-u.
- $\overrightarrow{grad}\ u$ est dirigé dans le sens des u croissants.

4.2 Divergence

$$div : \begin{cases} \text{champ vectoriel} & \to \text{champ scalaire} \\ & \overrightarrow{A} \mapsto div \overrightarrow{A} \end{cases} \qquad \text{tel que } d\Phi = div\ (\overrightarrow{A}) d\tau$$

où $d\Phi$ est le flux élémentaire sortant de $\overrightarrow{A}$ à travers la surface fermée délimitant le volume $d\tau$.

$$\overrightarrow{A} = (x,y,z) = \left| \begin{array}{l} A_x(x,y,z) \\ A_y(x,y,z) \\ A_z(x,y,z) \end{array} \right. \qquad div \overrightarrow{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

4.3 Rotationnel

$$\overrightarrow{rot} : \begin{cases} \text{champ vectoriel} & \to \text{champ vectoriel} \\ & \overrightarrow{A} \mapsto \overrightarrow{rot}\ \overrightarrow{A} \end{cases} \qquad \text{tel que } d\mathcal{C} = \overrightarrow{rot}(\overrightarrow{A}) \cdot \overrightarrow{dS}$$

où $d\mathcal{C}$ est la circulation élémentaire de $\overrightarrow{A}$ le long de Γ ($\overrightarrow{dS}$ vecteur surface élémentaire de la surface s'appuyant sur Γ).

$$\overrightarrow{A} = (x,y,z) = \left| \begin{array}{l} A_x(x,y,z) \\ A_y(x,y,z) \\ A_z(x,y,z) \end{array} \right. \qquad \overrightarrow{rot}\ \overrightarrow{A} = \left| \begin{array}{l} \dfrac{\partial A_z}{\partial y} - \dfrac{\partial A_y}{\partial z} \\ \dfrac{\partial A_x}{\partial z} - \dfrac{\partial A_z}{\partial x} \\ \dfrac{\partial A_y}{\partial x} - \dfrac{\partial A_x}{\partial y} \end{array} \right.$$

4.4 Laplacien scalaire

$$\Delta : \left\{ \begin{array}{c} \text{champ scalaire } \to \text{champ scalaire} \\ u \mapsto \Delta u \end{array} \right. \qquad \text{tel que } \Delta u = div\left(\overrightarrow{grad}\ u\right)$$

$$u(x,y,z) \qquad \Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

4.5 Laplacien vectoriel

$$\Delta : \left\{ \begin{array}{c} \text{champ vectoriel } \to \text{champ vectoriel} \\ \overrightarrow{A} \mapsto \Delta\overrightarrow{A} \end{array} \right. \qquad \text{tel que } \Delta\overrightarrow{A} = \overrightarrow{grad}\left(div\overrightarrow{A}\right) - \overrightarrow{rot}\left(\overrightarrow{rot}\overrightarrow{A}\right)$$

$$\overrightarrow{A}(x,y,z) = \left| \begin{array}{l} \Delta A_x \\ \Delta A_y \\ \Delta A_z \end{array} \right. \qquad \Delta\overrightarrow{A} = \left| \begin{array}{l} \dfrac{\partial^2 A_x}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 A_x}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 A_x}{\partial z^2} \\ \dfrac{\partial^2 A_y}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 A_y}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 A_y}{\partial z^2} \\ \dfrac{\partial^2 A_z}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 A_z}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 A_z}{\partial z^2} \end{array} \right.$$

4.6 Quelques relations entre opérateurs

$$div\left(\overrightarrow{rot}\overrightarrow{A}\right) = 0$$

$$\overrightarrow{rot}\left(\overrightarrow{grad}\ u\right) = \overrightarrow{0}$$

Si $\overrightarrow{B}$ est tel que $div\overrightarrow{B} = 0$ alors on admet qu'il existe $\overrightarrow{A}$ tel que $\overrightarrow{B} = \overrightarrow{rot}\overrightarrow{A}$.
Si $\overrightarrow{A}$ est tel que $\overrightarrow{rot}\overrightarrow{A} = \overrightarrow{0}$, alors il existe u tel que $\overrightarrow{A} = \overrightarrow{grad}\ u$.

5 Deux théorème fondamentaux

5.1 Théorème d'Ostrogradsky

On fixe t. Soit $\overrightarrow{A}$ un champ vectoriel. Soit Σ une surface fermée.

$$\text{À } t \text{ fixé, } \Phi = \oiint_\Sigma \overrightarrow{A}\cdot\overrightarrow{dS} = \iiint_V div\overrightarrow{A}\,d\tau$$

Soit $\overrightarrow{B}$ un champ à flux conservatif i.e. $\forall\Sigma$ fermée, $\oiint_\Sigma \overrightarrow{B}\cdot\overrightarrow{dS} = 0$.

Alors $\exists\overrightarrow{A}$ tel que $\overrightarrow{B} = \overrightarrow{rot}\overrightarrow{A}$.

5.2 Théorème de Stokes

On fixe t. Soit $\overrightarrow{A}$ un champ vectoriel et Γ un contour fermé orienté.

$$\mathcal{C} = \oint_{\Gamma} \overrightarrow{A} \cdot \overrightarrow{dl} = \iint_{\Sigma} \overrightarrow{rot}\overrightarrow{A} \cdot \overrightarrow{dS}$$

avec Σ n'importe qu'elle surface s'appuyant sur Γ, orientée suivant la règle du tire-bouchon.
Soit $\overrightarrow{A}$ un champ à circulation conservative i.e. $\forall \Sigma$ fermée, $\oint_{\Sigma} \overrightarrow{A} \cdot \overrightarrow{dl} = 0$.
Alors $\exists u$ tel que $\overrightarrow{A} = \overrightarrow{grad}\, u$