ESTAT Chapitre 1 : Rappels et compléments d'électrostatique

16/12/2011

---

1 Les distributions

- Charge poctuelle q en C.
- Densité linéique : $\lambda(P)$ en $C \cdot m^{-1}$. dl porte $dq = \lambda(P) \cdot dl$.
- Densité surfacique : $\sigma(P)$ en $C \cdot m^{-2}$. dS porte $dq = \sigma(P) \cdot dS$.
- Densité volumique : $\rho(P)$ en $C \cdot m^{-3}$. $d\tau$ porte $dq = \rho(P) \cdot d\tau$.

Pour le moment, aucune carge électrique n'est mobile (statique).

2 Champ électrostatique

Principe de superposition.
Formule de calcul : formule de Coulomb :

$$\overrightarrow{E}(M) = \frac{q\overrightarrow{u}}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \frac{q\overrightarrow{OM}}{4\pi\varepsilon_0 OM^3}$$

$$\overrightarrow{E}(M) = \int \frac{\lambda(P)dl\overrightarrow{u_{PM}}}{4\pi\varepsilon_0 PM^2} \quad \overrightarrow{E}(M) = \int \frac{\sigma(P)dS\overrightarrow{u_{PM}}}{4\pi\varepsilon_0 PM^2} \quad \overrightarrow{E}(M) = \int \frac{\rho(P)d\tau\overrightarrow{u_{PM}}}{4\pi\varepsilon_0 PM^2}$$

Propriété : $\overrightarrow{E}$ n'est pas défini en q, sur $\mathcal{C}$ chargé, sur Σ chargée. Mais il existe dans V chargé.

Symétrie : symétrie de distribution implique une symétrie de $\overrightarrow{E}$.

3 Relecture du thorème de Gauss

3.1 Énoncé sous forme intégrale

Le flux sortant du champ électrostatique à travers une surface fermée Σ, dû à une distribution $\mathcal{D}$ est égale à la charge intérieure à Σ divisée par ε_0.

$$\oiint_{\Sigma} \overrightarrow{E}(P) \cdot \overrightarrow{dS} = \frac{Q_{\text{int}}}{\varepsilon_0}$$

$\overrightarrow{E}$ n'est pas à flux conservatif.

3.2 Formulation locale

$$div\overrightarrow{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

4 Potentiel électrostatique

4.1 Circulation

$\exists V$ un scalaire tel que :

$$\int_{M_1}^{M_2} \overrightarrow{E}(P) \cdot \overrightarrow{dl} = -\Delta V = D(M_1) - V(M_2)$$

Pour Γ fermée : $\oint_\Gamma \overrightarrow{E} \cdot \overrightarrow{dl} = V(M_1) - V(M_1) = 0$: $\overrightarrow{E}$ est à circulation conservative.
V n'est pas défini sur q, sur une densité linéique, mais défini et continu sur surface chargé ou dans un volume chargé.
Formules : valables uniquement si $\mathcal{D}$ (la distribution) ne présente pas de charges à l'infini :

$$V(M) = \int_{\mathcal{C}} \frac{\lambda(P)dl}{4\pi\varepsilon_0 PM} \quad V(M) = \iint_{\mathcal{C}} \frac{\sigma(P)dS}{4\pi\varepsilon_0 PM} \quad V(M) = \iiint \frac{\rho(P)d\tau}{4\pi\varepsilon_0 PM}$$

Charges ponctuelles :

$$\sum_{i=1}^{N} \frac{q_i}{4\pi\varepsilon_0 P_i M}$$

4.2 Formulation locale

$\overrightarrow{E}$: circulation conservative donc $\exists u$ tel que $\overrightarrow{E} = -\overrightarrow{grad}\ u$. En fait, on pose $V = -u$.

$$\overrightarrow{E} = -\overrightarrow{grad}\ V$$

V est défini à une constante près.

4.3 Énergie potentielle d'une charge ponctuelle

q placé en M où le potentiel est $V(M)$. Alors l'énergie potentielle $\mathcal{E}_p = q \cdot V(M)$.
Remarque : $\overrightarrow{F} = -\overrightarrow{grad}\ \mathcal{E}_p = -\overrightarrow{grad}\ (qV) = q\overrightarrow{E}$.

4.4 Équipotentielles

Définition : surface à V constant, or $\overrightarrow{E} = -\overrightarrow{grad}\ V$.
D'après les propriétés du gradient, $\overrightarrow{E}$ est perpendiculaire aux équipotentielles.
$\overrightarrow{E}$ est dirigé dans le sens des potentiels décroissants.

5 Équation de Poisson

5.1 Résultat

$$\Delta V + \frac{\rho}{\varepsilon_0} = 0$$