ETRO Chapitre 1 : Analyse spectrale

27/9/2011

---

1 Décomposition en série de Fourier

Théorème : Soit s un signal périodique, de pulsation ω_1, de prédiode $T = \dfrac{2\pi}{\omega_1}$ et de fréquence $f = \dfrac{\omega_1}{2\pi}$.

Il existe des nombres $(a_n)_{n\geqslant 0}$ et $(b_n)_{n\geqslant 1}$ tels que pour tout t, $s(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} [a_n \cos(n\omega_1 t) + b_n \sin(n\omega_1 t)]$.

C'est la décomposition en série de Fourier de s. Les (a_n) et (b_n) sont les coefficients de Fourier de s.

Vocabulaire et expression des coefficients : $a_0 = \dfrac{1}{T}\displaystyle\int_{t_0}^{t_0+T} s(t)dt$ où t_0 quelconque.

Pour $n \geqslant 1$, $a_n = \dfrac{2}{T}\displaystyle\int_{t_0}^{t_0+T} s(t)\cos(n\omega_1 t)dt$ et $b_n = \dfrac{2}{T}\displaystyle\int_{t_0}^{t_0+T} s(t)\sin(n\omega_1 t)dt$.

a_0 est la valeur moyenne du signal s : $a_0 = < s(t) >$. C'est la composante continue de s.
$a_1\cos(\omega_1 t) + b_1 \sin(\omega_1 t)$ a même pulsation que s, on l'appelle composante fondamentale de s.
$a_n \cos(n\omega_1 t) + b_n \sin(n\omega_1 t)$ a pour pulsation $n\omega_1$. C'est le n-ième harmonique de la décomposition en série de Fourier.

Forme alternative : La décomposition avec $(a_n), (b_n)$ est une écritre en cosinus, sinus.

Écrivons cette décomposition en amplitude / phase. $s(t) = c_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} c_n \cos(n\omega_1 t + \varphi_n)$.

$c_0 = a_0$, $\forall n \geqslant 1$, $c_n \geqslant 0$, $c_n = \sqrt{{a_n}^2 + {b_n}^2}$ et $\tan\varphi_n = -\dfrac{b_n}{a_n}$.

Propriétés des coefficients :

- Si s paire, alors $(b_n)_{n\geqslant 1} = 0$.
- Si s impaire, alors $(a_n)_{n\geqslant 0} = 0$.
- Si s possède la symétrie de glissement i.e. $s\left(t + \dfrac{T}{2}\right) = -s(t)$, alors $(a_{2n})_{n\geqslant 0}$ et $(b_{2n})_{n\geqslant 1}$ sont nuls. Il ne reste que les coefficients d'indices impaires.
- $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = 0$.

Lien avec la valeur efficace : $s_{\text{eff}}^2 = \dfrac{1}{T}\displaystyle\int_{t_0}^{t_0+T} s^2(t)dt = \sqrt{< s^2 >}$.

Pour un signal sinusoïdale, on retrouvera $s_{\text{eff}} = \dfrac{S_m}{\sqrt{2}}$.

Théorème de Parseval : $\dfrac{1}{T}\displaystyle\int_0^T s^2(t)dt = {a_0}^2 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}\left({a_n}^2 + {b_n}^2\right) = {c_0}^2 + \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}{c_n}^2.$

$s_{\text{eff}} = \sqrt{{a_0}^2 + \dfrac{1}{2}\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}({a_n}^2 + {b_n}^2)} = \sqrt{{c_0}^2 + \dfrac{1}{2}\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}{c_n}^2}.$

2 Spectre d'un signal périodique

Idée : s peut être représenté soit temporellement soit dans le domaine des fréquences.
Représentation spectrale : graphes donnant

- (a_n, b_n) en fonction de la fréquence
- ou (c_n, φ_n) en fonction de la fréquence.