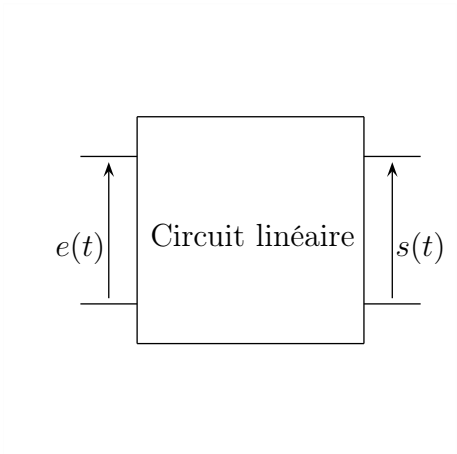
# ETRO Chapitre 2 : Filtrage par les circuits linéaires

30/9/2011

# 1 Rappels

## 1.1 Fonction de transfert

### 1.1.1 Définition




Si le circuit est linéaire, alors le lien entre $s(t)$ et $e(t)$ est du type : $a_m \dfrac{d^m s}{dt^m} + \ldots + a_1 \dfrac{ds}{dt} + a_0 s = b_n \dfrac{d^n e}{dt^n} + \ldots + b_1 \dfrac{de}{dt} + b_0 e$. Pour des raisons de causalité, $m \geqslant n$. On se place en régime sinusoïdale forcé et on utilisera la notation complexe : $s(t) = S_m \cos(\omega t + \varphi) \to \underline{s}(t) = \underline{S_m} e^{j\omega t} = S_m e^{j(\omega t + \varphi)}$.
Comme $\dfrac{d^k s}{dt^k} = (j\omega)^k$, $\underline{e}(t)$ et $\underline{s}(t)$ vérifient alors :
$[a_m (j\omega)^m + \ldots + a_1 j\omega + a_0]\, s = [b_n (j\omega)^n + \ldots + b_1 j\omega + b_0]\, e$.
On pose alors $\underline{H}(j\omega) = \dfrac{\underline{s}}{\underline{e}} = \dfrac{b_n (j\omega)^n + \ldots + b_1 j\omega + b_0}{a_m (j\omega)^m + \ldots + a_1 j\omega + a_0}$. C'est une fraction rationnelle en $j\omega$.
On définit le gain réel de la fonction de transfert $G(\omega) = |\underline{H}(j\omega)|$ et la phase de la fonction de transfert $\varphi(\omega) = \arg(\underline{H}(j\omega))$.

### 1.1.2 Utilisation en régime harmonique

C'est-à-dire que $e(t)$ est purement sinusoïdal : $e(t) = E_m \cos(\omega t + \varphi_e)$ et alors $s(t)$ l'est aussi si on utilise un circuit linéaire : $e(t) = S_m \cos(\omega t + \varphi_s)$.
$\underline{s} = \underline{H}(j\omega)\underline{e}$
$S_m = G(\omega) E_m$
$\varphi_s = \varphi(\omega) + \varphi_e$

## 1.2 Diagramme de Bode

### 1.2.1 Définition

Un diagramme de Bode comporte deux graphes : la courbe de réponse en gain et la courbe de réponse en phase.

On choisit une pulsation de référence $\omega_{\text{ref}}$.
La courbe de réponse en gain est le graphe du grain réel exprimé en décibels en fonction de la variable $X = \log\left(\dfrac{\omega}{\omega_{\text{ref}}}\right)$. $G_{dB} = 20\log\left(G\left(\omega\right)\right)$ (... petit doute).
La courbe de réponse en phase est le graphe est le graphe donnant la phase de la fonction de transfert en fonction de la variable $X = \log\left(\dfrac{\omega}{\omega_{\text{ref}}}\right)$.

### 1.2.2 Superposition

Si $\underline{H} = \underline{H_1} \times \underline{H_2}$ :
- $G_{dB}(\omega) = 20\log(G_1) + 20\log(G_2)$ ;
- $\arg(\underline{H}) = \arg(\underline{H_1}) + \arg(\underline{H_2}) = \varphi_1 + \varphi_2$.

# 2 Calcul de la sortie en régime périodique non harmonique

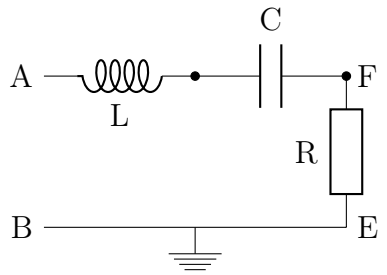
Idée : on prend une entrée périodique $e(t)$ et un circuit linéaire. Que vaut la sortie ?
On utilise le théorème de superposition et la décomposition en série de Fourier.
On calcule la réponse du circuit à chaque composante de la décomposition en série de Fourier de $e(t)$.
C'est « facile » car chaque composante est sinusoïdale. On peut utiliser $\underline{H}$ du circuit.
Par superposition, $s(t)$ sera la somme de toutes les ces réponses individuelles.

$$s(t) = G(0)a_0\cos(\varphi(0)) + \sum_{n=1}^{+\infty} G(n\omega_1)\left[a_n\cos\left(n\omega_1 t + \varphi\left(n\omega_1\right)\right) + b_n\sin\left(n\omega_1 t + \varphi\left(n\omega_1\right)\right)\right]$$

$$s(t) = G(0)c_0\cos(\varphi(0)) + \sum_{n=1}^{+\infty} G(n\omega_1)c_n\cos\left(n\omega_1 t + \varphi_n + \varphi\left(n\omega_1\right)\right)$$

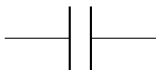
# 3 Passe bande passif d'ordre 2

## 3.1 Circuit :




## 3.2 Prévision du comportement

On utilise les composants équivalent lorsque $\omega \to 0$ et $\omega \to +\infty$.


$\Longleftrightarrow \begin{cases} \text{interrupteur ouvert quand } \omega \to +\infty \\ \text{interrupteur fermé quand } \omega \to 0 \end{cases}$

$\Longleftrightarrow \begin{cases} \text{interrupteur ouvert quand } \omega \to 0 \\ \text{interrupteur fermé quand } \omega \to +\infty \end{cases}$

A priori, on a bien un passe-bande.

### 3.3 Calcul de la fonction de transfert :

$\underline{H} = \frac{\underline{s}}{\underline{e}} = \frac{1}{1+\frac{j}{R}(L\omega - \frac{1}{C\omega})}$ de la forme $\frac{H_0}{1+jQ(\frac{\omega}{\omega_0}-\frac{\omega_0}{\omega})}$ avec $H_0 = 1$, $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$, et $Q = \frac{1}{RC\omega_0}$.

### 3.4 Tracé du diagramme de Bode asymptotique

Aux basses fréquences, on a une asymptote oblique de pente $+20dB$/décade passant par le point $(0, -20\log Q)$.
Aux hautes fréquences, on a une asymptote oblique de pente $-20dB$/décade passant par le point $(0, -20\log Q)$.
Phase : $\begin{cases} x \to 0^+ : \varphi \to \frac{\pi}{2} \\ x \to +\infty : \varphi \to -\frac{\pi}{2} \end{cases}$

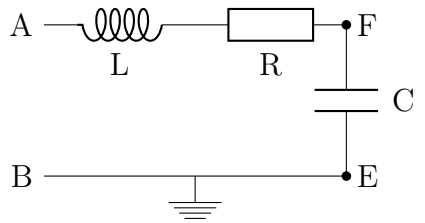
### 3.5 Calcul de la largeur de la bande passante

Les pulsations de coupures sont telles que $G(\omega_C) = \frac{G_{\max}}{\sqrt{2}}$.

$x_c = \frac{\pm\frac{1}{Q} + \sqrt{4+\frac{1}{Q^2}}}{2}$

La largeur réduite de bande passante $\Delta x = x_{c_2} - x_{c_1} = \frac{1}{Q}$

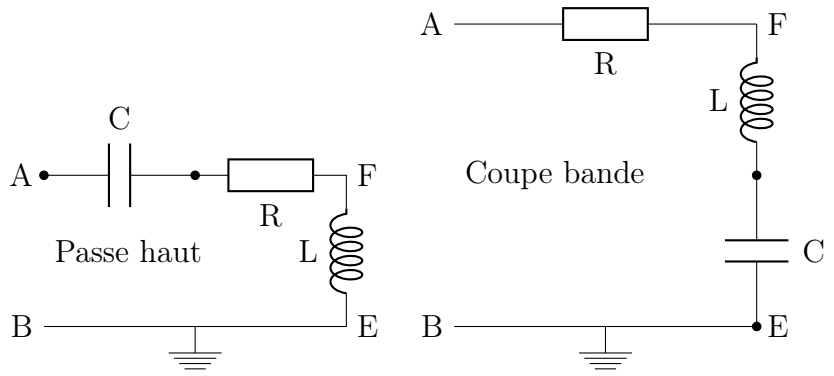
## 4 Passe-bas passif d'ordre 2




monté à vide.

Les prévisions du comportement montre qu'a priori, on a bien un filtre passe bas.
Fonction de transfert : $\underline{H} = \frac{1}{1+jRC\omega - LC\omega^2} = \frac{1}{1+\frac{j}{Q}x - x^2}$ avec ${\omega_0}^2 = \frac{1}{LC}$, $x = \frac{\omega}{\omega_0}$, $Q = \frac{L\omega_0}{R} = \frac{1}{RC\omega_0}$.
Diagramme de Bode :
aux basses fréquences, asymptote horizontale à $0dB$ .
aux hautes fréquences, asymptote oblique qui passe par l'origine et de pente $-40dB$/décade.
Phase : $\begin{cases} x \to 0^+ : \varphi \to 0 \\ x \to +\infty : \varphi \to -\pi \end{cases}$

# 5 Autres filtres passifs d'ordre 2




et le déphaseur.

# 6 Filtres actifs et filtres passifs

En général, le circuit est utilisé sur une charge. La fonction de transfert d'un filtre passif dépend de son utilisation. La solution passe en général par l'utilisation d'un filtre actif.

# 7 Comportement intégrateur d'un circuit

## 7.1 Intégrateur idéal

Fonction de tranfert : $\underline{H} = \dfrac{\omega_0}{j\omega}$.
Diagramme de Bode : droite de pente $-20dB$/décade passant par l'origine : $-20X$ avec $X = \log\left(\dfrac{\omega}{\omega_0}\right)$.
Un système réel ne peut pas avoir un gain infini aux basses fréquences, c'est un cas idéal.

## 7.2 Comportement d'un circuit intégrateur

Un signal périodique $e$ de pulsation telle que toutes ses composantes « voient » dans la courbe de réponse en gain une pente de $-20dB$/décade est tout simplement intégré par le circuit. On dit que le circuit a un comportement intégrateur vis-à-vis de $e(t)$.

# 8 Comportement dérivateur d'un circuit :

## 8.1 Dérivateur idéal

Fonction de transfert : $\underline{H} = \dfrac{j\omega}{\omega_0}$.
Diagramme de Bode : droite de pente $+20dB$/décade passant par l'origine : $+20X$ avec $X = \log\left(\dfrac{\omega}{\omega_0}\right)$.
Un système réel ne peut pas avoir un gain infini aux hautes fréquences, c'est un cas idéal.

## 8.2 Comportement d'un circuit dérivateur

Un signal périodique $e$ de pulsation telle que toutes ses composantes « voient » dans la courbe de réponse en gain une pente de $+20dB$/décade est tout simplement intégré par le

circuit. On dit que le circuit a un comportement dérivateur vis-à-vis de $e(t)$.
Remarque : cela pose problème pour les signaux ayant un nombre infini de composantes.