Physique
Électronique

2011-2012

Table des matières

Chapitre 1

Analyse harmonique

1.1 Décomposition en série de Fourier

Théorème : Soit s un signal périodique, de pulsation ω_1, de prédiode $T = \dfrac{2\pi}{\omega_1}$ et de fréquence $f = \dfrac{\omega_1}{2\pi}$.

Il existe des nombrs $(a_n)_{n\geqslant 0}$ et $(b_n)_{n\geqslant 1}$ tels que pour tout t, $s(t) = a_0 + \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} [a_n \cos(n\omega_1 t) + b_n \sin(n\omega_1 t)]$.

C'est la décomposition en série de Fourier de s. Les (a_n) et (b_n) sont les coefficients de Fourier de s.

Vocabulaire et expression des coefficients : $a_0 = \dfrac{1}{T}\displaystyle\int_{t_0}^{t_0+T} s(t)dt$ où t_0 quelconque.

Pour $n \geqslant 1$, $a_n = \dfrac{2}{T}\displaystyle\int_{t_0}^{t_0+T} s(t)\cos(n\omega_1 t)dt$ et $b_n = \dfrac{2}{T}\displaystyle\int_{t_0}^{t_0+T} s(t)\sin(n\omega_1 t)dt$.

a_0 est la valeur moyenne du signal s : $a_0 = < s(t) >$. C'est la composante continue de s.

$a_1\cos(\omega_1 t) + b_1 \sin(\omega_1 t)$ a même pulsation que s, on l'appelle composante fondamentale de s.

$a_n\cos(n\omega_1 t) + b_n\sin(n\omega_1 t)$ a pour pulsation $n\omega_1$. C'est le n-ième harmonique de la décomposition en série de Fourier.

Forme alternative : La décomposition avec (a_n), (b_n) est une écritre en cosinus, sinus.

Écrivons cette décomposition en amplitude / phase. $s(t) = c_0 + \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} c_n \cos(n\omega_1 t + \varphi_n)$.

$c_0 = a_0$, $\forall n \geqslant 1$, $c_n \geqslant 0$, $c_n = \sqrt{{a_n}^2 + {b_n}^2}$ et $\tan\varphi_n = -\dfrac{b_n}{a_n}$.

Propriétés des coefficients :

- Si s paire, alors $(b_n)_{n\geqslant 1} = 0$.
- Si s impaire, alors $(a_n)_{n\geqslant 0} = 0$.
- Si s possède la symétrie de glissement i.e. $s\left(t + \dfrac{T}{2}\right) = -s(t)$, alors $(a_{2n})_{n\geqslant 0}$ et $(b_{2n})_{n\geqslant 1}$ sont nuls. Il ne reste que les coefficients d'indices impaires.
- $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$ et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} b_n = 0$.

Lien avec la valeur efficace : $s_{\text{eff}}^2 = \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} s^2(t)dt = \sqrt{< s^2 >}$.

Pour un signal sinusoïdale, on retrouvera $s_{\text{eff}} = \frac{S_m}{\sqrt{2}}$.

Théorème de Parseval : $\frac{1}{T}\int_0^T s^2(t)dt = {a_0}^2 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}\left({a_n}^2 + {b_n}^2\right) = {c_0}^2 + \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}{c_n}^2$.

$s_{\text{eff}} = \sqrt{{a_0}^2 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}({a_n}^2 + {b_n}^2)} = \sqrt{{c_0}^2 + \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}{c_n}^2}$.

1.2 Spectre d'un signal périodique

Idée : s peut être représenté soit temporellement soit dans le domaine des fréquences. Représentation spectrale : graphes donnant

- (a_n, b_n) en fonction de la fréquence
- ou (c_n, φ_n) en fonction de la fréquence.

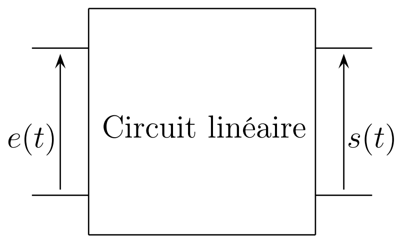
Chapitre 2

Filtrage par les circuits linéaires

2.1 Rappels

2.1.1 Fonction de transfert

Définition



Si le circuit est linéaire, alors le lien entre $s(t)$ et $e(t)$ est du type : $a_m \dfrac{d^m s}{dt^m} + \ldots + a_1 \dfrac{ds}{dt} + a_0 s = b_n \dfrac{d^n e}{dt^n} + \ldots + b_1 \dfrac{de}{dt} + b_0 e$. Pour des raisons de causalité, $m \geqslant n$. On se place en régime sinusoïdale forcé et on utilisera la notation complexe : $s(t) = S_m \cos(\omega t + \varphi) \rightarrow \underline{s}(t) = \underline{S_m} e^{j\omega t} = S_m e^{j(\omega t + \varphi)}$.
Comme $\dfrac{d^k s}{dt^k} = (j\omega)^k$, $\underline{e}(t)$ et $\underline{s}(t)$ vérifient alors :
$[a_m (j\omega)^m + \ldots + a_1 j\omega + a_0]\, s = [b_n (j\omega)^n + \ldots + b_1 j\omega + b_0]\, e$.
On pose alors $\underline{H}(j\omega) = \dfrac{\underline{s}}{\underline{e}} = \dfrac{b_n (j\omega)^n + \ldots + b_1 j\omega + b_0}{a_m (j\omega)^m + \ldots + a_1 j\omega + a_0}$. C'est une fraction rationnelle en $j\omega$.
On définit le gain réel de la fonction de transfert $G(\omega) = |\underline{H}(j\omega)|$ et la phase de la fonction de transfert $\varphi(\omega) = \arg(\underline{H}(j\omega))$.

Utilisation en régime harmonique

C'est-à-dire que $e(t)$ est purement sinusoïdal : $e(t) = E_m \cos(\omega t + \varphi_e)$ et alors $s(t)$ l'est aussi si on utilise un circuit linéaire : $e(t) = S_m \cos(\omega t + \varphi_s)$.
$\underline{s} = \underline{H}(j\omega)\underline{e}$
$S_m = G(\omega) E_m$
$\varphi_s = \varphi(\omega) + \varphi_e$

2.1.2 Diagramme de Bode

Définition

Un diagramme de Bode comporte deux graphes : la courbe de réponse en gain et la courbe de réponse en phase.
On choisit une pulsation de référence ω_{ref}.
La courbe de réponse en gain est le graphe du grain réel exprimé en décibels en fonction de la variable $X = \log\left(\dfrac{\omega}{\omega_{\text{ref}}}\right)$. $G_{dB} = 20\log\left(G\left(\omega\right)\right)$ (... petit doute).
La courbe de réponse en phase est le graphe est le graphe donnant la phase de la fonction de transfert en fonction de la variable $X = \log\left(\dfrac{\omega}{\omega_{\text{ref}}}\right)$.

Superposition

Si $\underline{H} = \underline{H_1} \times \underline{H_2}$:
- $G_{dB}(\omega) = 20\log(G_1) + 20\log(G_2)$;
- $\arg(\underline{H}) = \arg(\underline{H_1}) + \arg(\underline{H_2}) = \varphi_1 + \varphi_2$.

2.2 Calcul de la sortie en régime périodique non harmonique

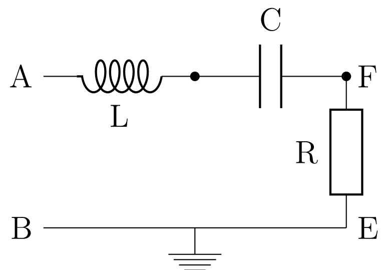
Idée : on prend une entrée périodique $e(t)$ et un circuit linéaire. Que vaut la sortie ?
On utilise le théorème de superposition et la décomposition en série de Fourier.
On calcule la réponse du circuit à chaque composante de la décomposition en série de Fourier de $e(t)$.
C'est « facile » car chaque composante est sinusoïdale. On peut utiliser $\underline{H}$ du circuit.
Par superposition, $s(t)$ sera la somme de toutes les ces réponses individuelles.

$$s(t) = G(0)a_0\cos(\varphi(0)) + \sum_{n=1}^{+\infty} G(n\omega_1)\left[a_n\cos\left(n\omega_1 t + \varphi\left(n\omega_1\right)\right) + b_n\sin\left(n\omega_1 t + \varphi\left(n\omega_1\right)\right)\right]$$

$$s(t) = G(0)c_0\cos(\varphi(0)) + \sum_{n=1}^{+\infty} G(n\omega_1)c_n\cos\left(n\omega_1 t + \varphi_n + \varphi\left(n\omega_1\right)\right)$$

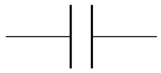
2.3 Passe bande passif d'ordre 2

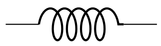
2.3.1 Circuit :



2.3.2 Prévision du comportement

On utilise les composants équivalent lorsque $\omega \to 0$ et $\omega \to +\infty$.

 $\Longleftrightarrow \begin{cases} \text{interrupteur ouvert quand } \omega \to +\infty \\ \text{interrupteur fermé quand } \omega \to 0 \end{cases}$

 $\Longleftrightarrow \begin{cases} \text{interrupteur ouvert quand } \omega \to 0 \\ \text{interrupteur fermé quand } \omega \to +\infty \end{cases}$

A priori, on a bien un passe-bande.

2.3.3 Calcul de la fonction de transfert :

$\underline{H} = \dfrac{\underline{s}}{\underline{e}} = \dfrac{1}{1 + \frac{j}{R}(L\omega - \frac{1}{C\omega})}$ de la forme $\dfrac{H_0}{1 + jQ(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega})}$ avec $H_0 = 1$, $\omega_0 = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}$, et $Q = \dfrac{1}{RC\omega_0}$.

2.3.4 Tracé du diagramme de Bode asymptotique

Aux basses fréquences, on a une asymptote oblique de pente $+20dB/$décade passant par le point $(0, -20\log Q)$.
Aux hautes fréquences, on a une asymptote oblique de pente $-20dB/$décade passant par le point $(0, -20\log Q)$.

Phase : $\begin{cases} x \to 0^+ : \varphi \to \dfrac{\pi}{2} \\ x \to +\infty : \varphi \to -\dfrac{\pi}{2} \end{cases}$

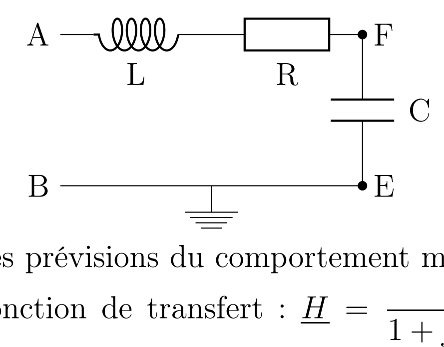
2.3.5 Calcul de la largeur de la bande passante

Les pulsations de coupures sont telles que $G(\omega_C) = \dfrac{G_{\max}}{\sqrt{2}}$.

$$x_c = \frac{\pm\frac{1}{Q} + \sqrt{4 + \frac{1}{Q^2}}}{2}$$

La largeur réduite de bande passante $\Delta x = x_{c_2} - x_{c_1} = \dfrac{1}{Q}$

2.4 Passe-bas passif d'ordre 2



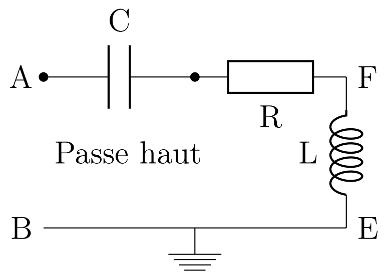
monté à vide.

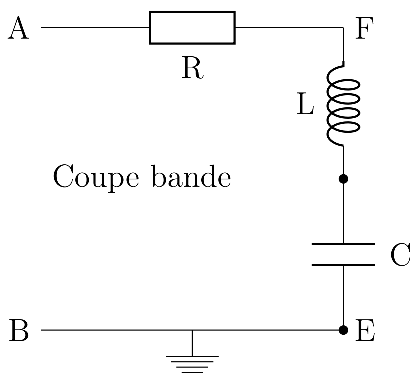
Les prévisions du comportement montre qu'a priori, on a bien un filtre passe bas.
Fonction de transfert : $\underline{H} = \dfrac{1}{1 + jRC\omega - LC\omega^2} = \dfrac{1}{1 + \frac{j}{Q}x - x^2}$ avec ${\omega_0}^2 = \dfrac{1}{LC}$, $x = \dfrac{\omega}{\omega_0}$, $Q = \dfrac{L\omega_0}{R} = \dfrac{1}{RC\omega_0}$.
Diagramme de Bode : Aux basses fréquences, asymptote horizontale à $0dB$.

Aux hautes fréquences, asymptote oblique qui passe par l'origine et de pente $-40dB/$décade.

Phase : $\begin{cases} x \to 0^+ : \varphi \to 0 \\ x \to +\infty : \varphi \to -\pi \end{cases}$

2.5 Autres filtres passifs d'ordre 2





et le déphaseur.

2.6 Filtres actifs et filtres passifs

En général, le circuit est utilisé sur une charge. La fonction de transfert d'un filtre passif dépend de son utilisation. La solution passe en général par l'utilisation d'un filtre actif.

2.7 Comportement intégrateur d'un circuit

2.7.1 Intégrateur idéal

Fonction de tranfert : $\underline{H} = \dfrac{\omega_0}{j\omega}$.

Diagramme de Bode : droite de pente $-20dB/$décade passant par l'origine : $-20X$ avec $X = \log\left(\dfrac{\omega}{\omega_0}\right)$.

Un système réel ne peut pas avoir un gain infini aux basses fréquences, c'est un cas idéal.

2.7.2 Comportement d'un circuit intégrateur

Un signal périodique e de pulsation telle que toutes ses composantes « voient » dans la courbe de réponse en gain une pente de $-20dB/$décade est tout simplement intégré par le circuit. On dit que le circuit a un comportement intégrateur vis-à-vis de $e(t)$.

2.8 Comportement dérivateur d'un circuit :

2.8.1 Dérivateur idéal

Fonction de transfert : $\underline{H} = \dfrac{j\omega}{\omega_0}$.

Diagramme de Bode : droite de pente $+20dB/$décade passant par l'origine : $+20X$ avec $X = \log\left(\dfrac{\omega}{\omega_0}\right)$.

Un système réel ne peut pas avoir un gain infini aux hautes fréquences, c'est un cas idéal.

2.8.2 Comportement d'un circuit dérivateur

Un signal périodique e de pulsation telle que toutes ses composantes « voient » dans la courbe de réponse en gain une pente de $+20dB/$décade est tout simplement intégré par le circuit. On dit que le circuit a un comportement dérivateur vis-à-vis de $e(t)$.
Remarque : cela pose problème pour les signaux ayant un nombre infini de composantes.

Chapitre 3

Compléments - Rappels

3.1 Stabilité des circuits linéaires du 1^er^ et du 2^nd^ ordre

Stabilité : circuit stable si aucune des grandeurs électriques du circuit ne peut prendre des valeurs infinies quelle que soit l'excitation $e(t)$.
Tous les circuits passifs sont stables.

3.1.1 1^er^ ordre

Soit $g(t)$ une grandeur electrique.
$\frac{dg}{dt} + \frac{1}{\tau}g = \dots e(t)$: si le temps caractéristique du circuit τ est positif, il y a stabilité, sinon il y a instabilité.

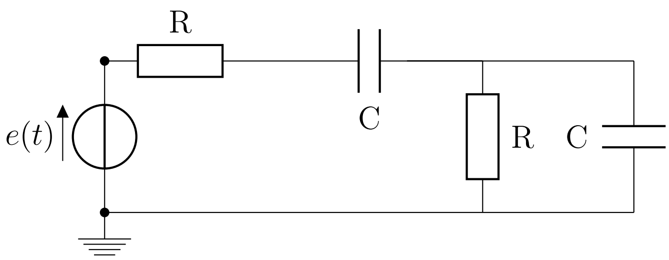
3.1.2 2^nd^ ordre

$a\frac{d^2g}{dt^2} + b\frac{dg}{dt} + cg = \dots e(t)$: stabilité si a, b et c sont de même signe.

3.2 Équation différentielle et paramètres du circuit

Pour obtenir l'équation que vérifie une grandeur du circuit électrique d'un circuit, il faut penser à utilise le régime sinusoïdale forcée et la notation complexe.
Pour un circuit du 2^nd^ ordre, pour déterminer ω_0 et Q il faut passer par l'identification avec la forme canonique : $\frac{d^2g}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q}\frac{dg}{dt} + {\omega_0}^2 g = \dots e(t)$.

Exemple : filtre de Wien :



Difficile sans passer par les complexes.