MES Chapitre 2 : Élements cinétiques des systèmes de points matériels - Cas du solide

9/9/2011

Notations :

- Référentiel : $\mathscr{R}$;
- Système : Σ.

Système discret : N points matériels M_i de masse m_i, $\overrightarrow{v}(M_i)_{/\mathscr{R}} = \overrightarrow{v_i}$. Masse totale : $m = \sum m_i$.

Système continu de volume V : $d\tau$ centré en Q de masse dm_Q. Masse totale : $\iiint\limits_V dm_Q$.

Barycentre : Le barycentre G d'un système Σ est l'unique point tel que $\sum_{i=1}^{N} m_i\overrightarrow{GM_i} = \overrightarrow{0}$ ou $\iiint\limits_V \overrightarrow{GQ} dm_q = \overrightarrow{0}$.

$\forall A$, $\sum_{i=1}^{N} m_i\overrightarrow{AM_i} = \sum_{i=1}^{N} m_i\overrightarrow{AG} = \left(\sum_{i=1}^{N} m_i\right)\overrightarrow{AG} = m\overrightarrow{AG}$ ou $\iiint\limits_V \overrightarrow{AQ} dm_Q = m\overrightarrow{AG}$.

Si Σ présente un plan de symétrie pour la distribution de masse, G appartient à ce plan.
Le barycentre G de $\Sigma_1 \cup \Sigma_2$ est le barycentre de $((G_1, m_1), (G_2, m_2))$.

Référentiel barycentrique : Le référentiel barycentrique pour cette étude est le référentiel en translation par rapport à $\mathscr{R}$ tel que G y soit immobile. On le note $\mathscr{R}^\star$.
Pour $\overrightarrow{A}$ grandeur vectorielle quelconque, $\left(\dfrac{d\overrightarrow{A}}{dt}\right)_{/\mathscr{R}^\star} = \left(\dfrac{d\overrightarrow{A}}{dt}\right)_{/\mathscr{R}}$ car $\mathscr{R}^\star$ est en translation par rapport à $\mathscr{R}$.

Quantité de mouvement :

- Définition : $\overrightarrow{P}(\Sigma)_{/\mathscr{R}} = \sum_{i=1}^{N} m_i\overrightarrow{v_i}$ ou $\iiint\limits_V \overrightarrow{v}(Q) dm_Q$.
- Propriétés : O fixe. $\overrightarrow{P}(\Sigma)_{/\mathscr{R}} = m\overrightarrow{v}(G)_{/\mathscr{R}}$.
- Cas du référentiel barycentrique : $\overrightarrow{P}^\star(\Sigma)_{/\mathscr{R}^\star} = m\overrightarrow{v}(G)_{/\mathscr{R}^\star} = \overrightarrow{0}$.

Moment cinétique en un point :

- Définition : A un point quelconque. $\overrightarrow{L}_{/A}(\Sigma)_{/\mathscr{R}} = \sum_{i=1}^{N} \overrightarrow{AM_i} \wedge m_i\overrightarrow{v_i}$ ou $\iiint\limits_V \overrightarrow{AQ} \wedge dm_Q\overrightarrow{v}(Q)$.
- Torseur cinétique : $\overrightarrow{L}_{/B}(\Sigma)_{/\mathscr{R}} = \overrightarrow{L}_{/A}(\Sigma)_{/\mathscr{R}} + \overrightarrow{P} \wedge \overrightarrow{AB}$.
  On a un torseur cinétique de résultante $\overrightarrow{P}$ et de moment $\overrightarrow{L}_{/A}$.

- Cas du référentiel barycentrique : $\overrightarrow{L}_{/B}(\Sigma)^\star = \overrightarrow{L}_{/A}(\Sigma)^\star + \underbrace{\overrightarrow{P}^\star}_{=\overrightarrow{0}} \wedge \overrightarrow{AB}$. Le moment cinétique ne dépend pas du point de calcul. On le note $\overrightarrow{L}^\star$.

Dans le référentiel barycentrique, le moment cinétique ne dépend pas du point de calcul. On le note $\overrightarrow{L}^\star$.

Moment cinétique par rapport à un axe orienté : Le moment cinétique de Σ par rapport à Δ est la projection de $\overrightarrow{L}_{/A}(\Sigma)_{/\mathscr{R}}$ où A est un point quelconque de Δ.

$$L_{/\Delta}(\Sigma) = \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{L}_{/A}(\Sigma)$$

Énergie cinétique : $Ec(\Sigma)_{/\mathscr{R}} = \displaystyle\sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2} m_i {v_i}^2$ ou $\displaystyle\iiint_V \frac{1}{2} dm_Q \cdot v(Q)^2$.

Théroèmes de König :

- Relatif au moment cinétique :

$$\overrightarrow{L}_{/A}(\Sigma)_{/\mathscr{R}} = \overrightarrow{L}^\star + \overrightarrow{AG} \wedge m\overrightarrow{v}(G)_{/\mathscr{R}}$$

- Relatif à l'énergie cinétique :

$$Ec(\Sigma)_{/\mathscr{R}} = Ec(\Sigma)^\star + \frac{1}{2} m v(G)_{/\mathscr{R}}^2$$

Cas du solide :

- Cas de la translation : le solide en translation a les mêmes éléments cinétiques que son barycentre affecté de toute la masse.
- Cas de la rotation autour d'un axe fixe :
  - Quantité de mouvement : $\overrightarrow{P} = m\overrightarrow{v}(G) \neq \overrightarrow{0}$ dès que $g \notin \Delta$.
  - Moment cinétique en un point $A \in \Delta$:

$$\overrightarrow{L}_{/A}(\Sigma) = \left[\iiint_{\text{Solide}} HQ^2 dm_Q\right] \overrightarrow{\omega} - \iiint_{\text{Solide}} (\overrightarrow{AH} - \overrightarrow{\omega})\overrightarrow{HQ} dm_Q$$

    S'il existe un plan de symétrie contenant Δ ou si le plan passant par A est perpendiculaire à Δ est un plan de symétrie, alors la composante perpendiculaire à ω est nul. On dit que Δ est un axe principal d'inertie. On pose $J_\Delta = \displaystyle\iiint_{\text{Solide}} HQ^2 dm_Q = \iiint_{\text{Solide}} r^2 dm$.
    C'est le moment d'inertie du solide par rapport à Δ.
    $\overrightarrow{L}_{/A} = J_\Delta \cdot \overrightarrow{\omega}$. $[J_\Delta] = kg \cdot m^2$. J_Δ ne dépend que de la masse du solide.
  - Moment cinétique par rapport à l'axe de rotation : $L_{/\Delta} = J_\Delta \cdot \omega$ avec $\omega = \overrightarrow{\omega} \cdot \overrightarrow{u}$ même si Δ n'est pas axe principal d'inertie.
  - Énergie cinétique : $Ec(\Sigma) = \frac{1}{2} J_\Delta \omega^2$ même si Δ n'est pas axe principal d'inertie mais doit être fixe.
- Cas de la rotation autour d'un axe de direction fixe : Dans $\mathscr{R}^\star$, le solide a un mouvement de rotation autour de l'axe fixe passant par G et parallele à la direction de rotation. On revient dans $\mathscr{R}$ par les théorèmes de König.

Théorème d'Huygens : Soit Δ_G une droite parallèle à Δ, alors $J_\Delta = J_{\Delta_G} + ma^2$.