MES Chapitre 3 : Théorèmes généraux de la dynamique des systèmes fermés

13/9/2011

---

1 Action mécanique sur un système :

Idée générale : On admet que les effets mécaniques qu'exerce un système Σ' sur un système Σ sont entièrement décrits par un torseur de résultante $\overrightarrow{R}$ et par un moment résultant $\overrightarrow{\mathcal{M}}_{/A}$.

Force unique appliqué en un point : On applique $\overrightarrow{F}$ en A. $\overrightarrow{\mathcal{M}}_{/A}$ n'est pas le moment de $\overrightarrow{R}$ en A.

$$\begin{cases} \overrightarrow{R} = \overrightarrow{F} \\ \overrightarrow{\mathcal{M}}_{/A} = \overrightarrow{AA} \wedge \overrightarrow{F} = \overrightarrow{0} \end{cases}$$

Ensemble de forces : On applique $\{\overrightarrow{F_i}\}$ en $\{M_i\}$.

$$\begin{cases} \overrightarrow{R} = \sum \overrightarrow{F_i} \\ \overrightarrow{\mathcal{M}}_{/A} = \sum \overrightarrow{AM_i} \wedge \overrightarrow{F_i} = \overrightarrow{0} \end{cases}$$

Couple : C'est une action particulière dont la résultante est nulle.

$$\begin{cases} \overrightarrow{R} = \overrightarrow{0} \\ \overrightarrow{\mathcal{M}}_{/A} = ? \end{cases}$$

Actions intérieures : Il y a des actions entre deux points quelconques M_i et M_j du système Σ étudié.

$$\begin{cases} \overrightarrow{R}_{\text{int}} = \overrightarrow{0} \\ \overrightarrow{\mathcal{M}}_{/A\ \text{int}} = \overrightarrow{0} \end{cases}$$

Principe des actions réciproques : Systèmes Σ_1 et Σ_2.

$\Sigma_1 \to \Sigma_2 : \begin{cases} \overrightarrow{R}_{1\to 2} \\ \overrightarrow{\mathcal{M}}_{/A\ 1\to 2} \end{cases}$ et $\Sigma_2 \to \Sigma_1 : \begin{cases} \overrightarrow{R}_{2\to 1} \\ \overrightarrow{\mathcal{M}}_{/A\ 2\to 1} \end{cases}$.

$$\begin{cases} \overrightarrow{R}_{1\to 2} = -\overrightarrow{R}_{2\to 1} \\ \overrightarrow{\mathcal{M}}_{/A\ 1\to 2} = -\overrightarrow{\mathcal{M}}_{/A\ 2\to 1} \end{cases}$$

2 Théorèmes généraux

Hyothèse et notations : Système Σ étudié dans $\mathscr{R}$ galiléen.

Actions extérieures $\begin{cases} \overrightarrow{R}_{\text{ext}} \\ \overrightarrow{\mathcal{M}}_{/A\ \text{ext}} \end{cases}$

Théorème de la quantité de mouvement : $\overrightarrow{P}\left(\Sigma_{/\mathscr{R}}\right) = \overrightarrow{P}$.

$$\left(\frac{d\overrightarrow{P}}{dt}\right)_{/\mathscr{R}} = \overrightarrow{R}_{\text{ext}}$$

Aussi appelé théorème de la résultante cinétique ou théorème de la résultante dynamique.
Autre forme : $m\overrightarrow{a}(G) = \overrightarrow{R}_{\text{ext}}$: théorème du centre de masse.

Théorème du moment cinétique en un point fixe A : $\overrightarrow{L}_{/A} = \overrightarrow{L}_{/A}(\Sigma_{/\mathscr{R}})$.

$$\left(\frac{d\overrightarrow{L}_{/A}}{dt}\right)_{/\mathscr{R}} = \overrightarrow{\mathcal{M}}_{/A\ \text{ext}}$$

Théorème du moment cinétique par rapport à un axe orienté : $L_{/\Delta} = \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{L}_{/A}$. On peut prendre A fixe $\in \Delta$.

$$\frac{dL_{/\Delta}}{dt} = \mathcal{M}_{/\Delta\ \text{ext}} \text{ : théorème scalaire du moment cinétique}$$

3 Théorèmes du moment cinétique et barycentre

En G dans $\mathscr{R}$:

$$\left(\frac{d\overrightarrow{L}_{/G}}{dt}\right)_{/\mathscr{R}} = \overrightarrow{\mathcal{M}}_{/G\ \text{ext}} = \overrightarrow{\mathcal{M}}_{/A\ \text{ext}} + \overrightarrow{R}_{\text{ext}} \wedge \overrightarrow{AG}$$

Dans $\mathscr{R}^\star$:

$$\left(\frac{d\overrightarrow{L}^\star}{dt}\right)_{/\mathscr{R}^\star} = \overrightarrow{\mathcal{M}}_{/G\ \text{ext}} \text{ même si } \mathscr{R}^\star \text{ non galiléen.}$$

Théorème du mouvement cinétique scalaire barycentrique : Soit un axe fixe Δ passant par G dans $\mathscr{R}^\star$. $\overrightarrow{u}$ vecteur unitaire de (Δ).

$$\frac{dL^\star_{/\Delta}}{dt} = \mathcal{M}_{/\Delta\ \text{ext}} \text{ : TMCS}^\star$$

4 Actions de contacts entre deux solides

- Liaison rotule :
  - permet toues les rotations : 3 degrés de libertés.
  - Liaison parfaite si $\overrightarrow{\mathcal{M}}_{/O} = \overrightarrow{0}$.
- Liaison pivot :
  - Un seul degré de liberté : rotation autour d'un axe fixe Δ.
  - Liaison parfaite si $\mathcal{M}_{/\Delta} = 0$.

5 Cas des référentiels non galiléens

Si $\mathscr{R}'$ est non galiléen, on rajoute les actions correspondantes aux forces d'inertie d'entrainement et de Coriolis.

$$\overrightarrow{df_{ie}} = -dm_Q\overrightarrow{a_e}(Q) \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{R} = \iiint\limits_V -dm_Q\overrightarrow{a_e}(Q) \\ \overrightarrow{\mathcal{M}}_{/A} \iiint\limits_V \overrightarrow{AQ} \wedge (-dm_Q\overrightarrow{a_e}(Q)) \end{cases}.$$

Si $\mathscr{R}'$ est en translation par rapport à $\mathscr{R}$, la force de Coriolis n'intervient pas et $\overrightarrow{a_e}(Q) = \overrightarrow{a_e} = \overrightarrow{a}(O')_{/\mathscr{R}}$. $\overrightarrow{df_{ie}} = -dm_Q\overrightarrow{a}(O')_{/\mathscr{R}}$.