MES Chapitre 5 : Aspect énergétique de la dynamique des systèmes

22/9/2011

---

1 Puissance et travail :

Notations : Soit Σ un système fermé quelconque avec une distribution continue des efforts / matières.
Sur $d\tau_Q$ centré en Q de vitesse $\overrightarrow{v}(Q)$ s'exerce $\overrightarrow{df_Q}$ et $\displaystyle\iiint_V \overrightarrow{df_Q} = \overrightarrow{R}$.
Remarque : toujours bien préciser le point d'application de chacun des $\overrightarrow{df_Q}$.

Définition : $\mathcal{P}(t) = \displaystyle\iiint_V \overrightarrow{df_Q} \cdot \overrightarrow{v}(Q)$: puissance totale de l'action sur le système.
Le travail élémentaire en t et $t + dt$: $\delta\mathcal{T} = \mathcal{P}(t)dt$.
Le travail fini entre t_1 et t_2 : $\mathcal{T} = \displaystyle\int_{t_1}^{t_2} \delta\mathcal{T} = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{P}(t)dt$.

Cas des actions intérieures : Actions intérieures : $\{\overrightarrow{0}, \overrightarrow{0}\}_{/A}$. Cependant, la puissance des actions intérieures est à priori non nulle. $\mathcal{P}_{\text{int}} \neq 0$ en général.
On admet :
- $\mathcal{P}_{\text{int}}$ ne dépend pas du referentiel de calcul ;
- $\mathcal{P}_{\text{int}} \neq 0$ dès que la distance entre 2 points du système qui interagissent varie au cours du temps.

Cas du solide : $\Sigma = S$ un solide.

$$\mathcal{P} = \overrightarrow{R} \cdot \overrightarrow{v}(A) + \overrightarrow{\omega} \cdot \overrightarrow{\mathcal{M}}_{/A}$$

Cas particulier :
- si l'action est un glisseur dont I est le point d'application ($\overrightarrow{\mathcal{M}}_{/I} = \overrightarrow{0}$). $\mathcal{P} = \overrightarrow{R} \cdot \overrightarrow{V}(I)$;
- si l'action est un couple : $\begin{cases} \overrightarrow{R} = \overrightarrow{0} \\ \overrightarrow{\mathcal{M}}_{/} = \overrightarrow{\Gamma} \end{cases}$, $\mathcal{P} = \overrightarrow{\omega} \cdot \overrightarrow{\Gamma}$;
- actions intérieures à un solide : $\begin{cases} \overrightarrow{R}_{\text{int}} = \overrightarrow{0} \\ \overrightarrow{\mathcal{M}}_{/A,\text{int}} = \overrightarrow{0} \end{cases}$, $\mathcal{P}_{\text{int}}$ (solide) $= 0$.

2 Théorème de la puissance et de l'énergie cinétique :

Soit Σ un système quelconque et $\mathscr{R}$ galiléen.

Théorème de la puissance cinétique :

$$\frac{dEc}{dt} = \mathcal{P}_{\text{ext}} + \mathcal{P}_{\text{int}}$$

Théorème de l'énergie cinétique : Obtenu par intégration entre deux instants t_1 et t_2 :

$$\Delta Ec = Ec(t_2) - Ec(t_1) = \mathcal{T}_{\text{ext}} + \mathcal{T}_{\text{int}}$$

Cas d'un seul solide :

$$\mathcal{P}_{\text{int}} = 0 \qquad \frac{dEc}{dt} = \mathcal{P}_{\text{ext}} \qquad \Delta Ec = \mathcal{T}_{\text{ext}}$$

3 Cas des actions de contact entre deux solides :

Deux solides S_1 et S_2, en contact ponctuel en I.
Action de $S_1 \to S_2$: $\left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{R} \\ \overrightarrow{\mathcal{M}}_{/I} = \overrightarrow{0} \end{array} \right.$ et action de $S_2 \to S_1$: $\left\{ \begin{array}{l} -\overrightarrow{R} \\ \overrightarrow{\mathcal{M}}_{/I} = \overrightarrow{0} \end{array} \right.$.

$$\mathcal{P} = \overrightarrow{T} \cdot \overrightarrow{v_g}(S_2/S_1)$$

Puissance nulle si non glissement , négative si glissement.

4 Solide en rotation autour d'un axe fixe Δ :

Soit une action $\left\{ \overrightarrow{R}, \overrightarrow{\mathcal{M}}_{/A} \right\}_{/A}$ s'exerçant sur le solide en rotation autour de l'axe fixe Δ. Soit A appartenant au solide et à Δ.

$$\mathcal{P}_{\text{action}} = \omega \cdot \mathcal{M}_{/\Delta} \text{ avec } \overrightarrow{\omega} = \omega \cdot \overrightarrow{u} = \dot{\theta} \cdot \overrightarrow{u}$$

D'où $\delta\mathcal{T} = \mathcal{P}dt = \mathcal{M}_{/\Delta}d\theta$ et le travail fini $\mathcal{T} = \displaystyle\int_{t_1 \text{ ou } \theta_1}^{t_2 \text{ ou } \theta_2} \mathcal{M}_{/\Delta}d\theta$.
Cas particulier des liaisons parfaites :

- pour les liaisons pivots parfaites : $\mathcal{P}_{\text{action}} = 0$;
- pour les liaisons rotules parfaites : $\mathcal{P}_{\text{action}} = 0$.

5 Énergie potentielle :

Définition : Soit Σ un système quelconque à n degrés de liberté cinématiques. La configuration du système est repérée par $(q_1(t), \ldots, q_n(t))$. Soit une évolution quelconque du système entre les deux instants t_1 et t_2 : $(q_1(t_1), \ldots, q_n(t_1)) \to (q_1(t_2), \ldots, q_n(t_2))$ (schéma dans l'espace de configuration du système).
Soit une action agissant sur le système et $\mathcal{T}_{1\to 2}$ le travail de cette action entre t_1 et t_2 le long de ce chemin. Cette action dérive d'une énergie potentielle ou est conservative si $\mathcal{T}_{1\to 2}$ ne dépend pas du chemin suivi entre l'état initial et l'état final dans l'espace de configuration.
On montre alors qu'il existe une fonction Ep, appelée énergie potentielle, fonction uniquement des paramètres $(q_1(t), \ldots, q_n(t))$ telle que :

$$\mathcal{T}_{1\to 2} = -\Delta Ep = Ep\big((q_1(t_1), \ldots, q_n(t_1)) \big) - Ep\big((q_1(t_2), \ldots, q_n(t_2)) \big) \text{ ou } \delta\mathcal{T} = -dEp$$

6 Théorèmes de l'énergie / puissance mécanique :

Notations : On note $Ep = Ep_{\text{int}} + Ep_{\text{ext}}$ l'énergie potentielle totale et $E_m = Ec + Ep$ l'énergie mécanique.

Théorème de la puissance mécanique :

$$\mathcal{P}_m = \frac{dEm}{dt} = \mathcal{P}_{\text{ext, non conservative}} + \mathcal{P}_{\text{int, non conservative}}$$

Théorème de l'énergie mécanique mécanique :

$$\Delta Em = \mathcal{T}_{\text{ext, non conservative}} + \mathcal{T}_{\text{int, non conservative}}$$

Cas particulier d'un seul solide :

$$\mathcal{P}_m = \frac{dEm}{dt} = \mathcal{P}_{\text{ext, non conservative}} \qquad \Delta Em = \mathcal{T}_{\text{ext, non conservative}}$$

7 Système conservatif :

Définition : Σ est un système conservatif si son énergie mécanique est constante au cours du temps. C'est le cas si on ne peut pas trouver d'action intérieure ou extérieure non conservative qui travaille.
Si un système est isolé, il ne subit pas d'actions extérieures. Cependant, il n'est pas forcément conservatif (à cause d'éventuelle actions intérieures non conservatives).

Intéret : $Em = \underbrace{Ec}_{\text{lien avec les vitesses}} + \underbrace{Ep}_{\text{lien avec la configuration de } \Sigma} = \text{constante.}$
Pour les système à 1 degré de liberté conservatif, l'équation $Em =$ constante est une intégrale première du mouvement (car équation différentiel avec les paramètres et les dérivées premières seulement).
On retrouve l'équation du second ordre en écrivant $\frac{dEm}{dt} = 0$

8 Cas des référentiels non galiléens :

On rajoute dans les bilans de puissances et de travaux ceux des forces d'inertie.
Or l'action de la force de Coriolis ne travaille pas. Il ne reste que les forces d'inertie d'entrainement.
Dans deux cas particuliers, cette action est même conservative :

1. $\mathscr{R}'$ est en rotation rectiligne uniformément accélérée par rapport à $\mathscr{R}$ galiléen ;
2. $\mathscr{R}'$ est en rotation uniforme par rapport à $\mathscr{R}$ galiléen.