Physique
Mécanique du solide

2011-2012

Table des matières

1	Cinématique du solide	2
2	Éléments cinétiques des systèmes de points matériels - Cas du solide	4
3	Théorèmes généraux de la dynamique des systèmes fermés	7
3.1	Action mécanique sur un système :	7
3.2	Théorèmes généraux	8
3.3	Théorèmes du moment cinétique et barycentre	8
3.4	Actions de contacts entre deux solides	8
3.5	Cas des référentiels non galiléens	9
4	Lois de Coulomb du frottement de glissement	10
4.1	Lois phénoménologiques :	10
5	Aspect énergétique de la dynamique des systèmes	12
5.1	Puissance et travail :	12
5.2	Théorème de la puissance et de l'énergie cinétique :	13
5.3	Cas des actions de contact entre deux solides :	13
5.4	Solide en rotation autour d'un axe fixe Δ :	13
5.5	Énergie potentielle :	13
5.6	Théorèmes de l'énergie / puissance mécanique :	14
5.7	Système conservatif :	14
5.8	Cas des référentiels non galiléens :	14

Chapitre 1

Cinématique du solide

Définition : Un solide est un système de points matériels tels que la distance entre deux points A et B quelconques de ce solide est une constante au cours du temps.

Degrés de liberté : Ce sont les paramètres à connaître pour savoir où se trouve le solide et dans quelle configuration. Le nombre de degrés de liberté détermine le nombre d'équations à écrire.

Exemples de mouvements :

- Translation : $\left(\frac{d\overrightarrow{AB}}{dt}\right)_{|\mathcal{R}} = \overrightarrow{0} \Rightarrow \overrightarrow{v}(A)_{|\mathcal{R}} = \overrightarrow{v}(B)_{|\mathcal{R}}$.
- Rotation autour d'un axe fixe dans $\mathcal{R}$: Rotation caractérisée par le vecteur rotation $\overrightarrow{\omega}$.
 $\forall P \in S, \overrightarrow{v}(P) = \overrightarrow{\omega}(S_{|\mathcal{R}}) \wedge \overrightarrow{OP}$.
 $\overrightarrow{\omega}$ mesure le taux de variation angulaire du solide à partir d'une direction fixe de $\mathcal{R}$.
- Rotation autour d'un axe de direction fixe dans $\mathcal{R}$: C'est une combinaison d'un mouvement de rotation autour d'un axe Δ fixe dans un référentiel $\mathcal{R}'$, $\mathcal{R}'$ étant en translation par rapport à $\mathcal{R}$.

Champs des vitesses dans un solide : Relation de Varignon : relation entre les vitesses de deux points appartenant au même solide. Soit A et B deux points d'un solide S . On reprend les notations du cas « rotation autour d'un axe de direction fixe dans $\mathcal{R}$ ».

$$\overrightarrow{v}(B)_{|\mathcal{R}} = \overrightarrow{v}(A)_{|\mathcal{R}} + \overrightarrow{\omega}(S_{|\mathcal{R}}) \wedge \overrightarrow{AB}$$

Le champ des vitesses a une structure de torseur.

Torseur cinématique dont la résultante $\overrightarrow{\omega}(S_{|\mathcal{R}})$ et le moment résultant en A est $\overrightarrow{v}(A)$ ce que l'on note : $\{\overrightarrow{\omega}(S_{|\mathcal{R}}), \overrightarrow{v}(A)\}_{|A}$

Cinématique du contact entre deux solides : Soit deux solides S_1 et S_2 , en contact ponctuel au point I . On suppose l'existence d'un plan tangent commun aux deux solides en I . On considère deux points matériels I_1 et I_2 , appartenant à S_1 et S_2 , qui sont confondus avec I à l'instant considéré.

S_2 peut être en translation par rapport à S_1 . On la caractérise par la vitesse de glissement de S_2 par rapport à S_1 . Cette vitesse appartient nécessairement au plan tangent commun.

$$\overrightarrow{v}_g(S_2/S_1) = \overrightarrow{v}(I_2 \in S_2) - \overrightarrow{v}(I_1 \in S_1)$$

S_2 peut également être en rotation par rapport à S_1 . Cette rotation est caractérisée par un vecteur rotation.

$$\vec{\Omega}_{2/1} = \vec{\Omega}_N + \vec{\Omega}_t$$

$\vec{\Omega}_N$, composante normale, caractérise le pivotement de S_2 par rapport à S_1 .

$\vec{\Omega}_t$, composante tangentielle, caractérise le roulement de S_2 par rapport à S_1 .

Cas du roulement sans glissement : S_2 roule sans glisser sur S_1 si :

- $\vec{v}_g = \vec{0}$ et
- s'il n'y a pas de pivotement i.e. $\vec{\Omega}_N = \vec{0}$.

Chapitre 2

Éléments cinétiques des systèmes de points matériels - Cas du solide

Notations :

- Référentiel : $\mathcal{R}$;
- Système : Σ .

Système discret : N points matériels M_i de masse m_i , $\vec{v}(M_i)_{/\mathcal{R}} = \vec{v}_i$. Masse totale : $m = \sum m_i$.

Système continu de volume V : $d\tau$ centré en Q de masse dm_Q . Masse totale : $\iiint_V dm_Q$.

Barycentre : Le barycentre G d'un système Σ est l'unique point tel que $\sum_{i=1}^N m_i \overrightarrow{GM}_i = \vec{0}$ ou

$$\iiint_V \overrightarrow{GQ} dm_q = \vec{0}.$$

$$\forall A, \sum_{i=1}^N m_i \overrightarrow{AM}_i = \sum_{i=1}^N m_i \overrightarrow{AG} = \left(\sum_{i=1}^N m_i \right) \overrightarrow{AG} = m \overrightarrow{AG} \text{ ou } \iiint_V \overrightarrow{AQ} dm_Q = m \overrightarrow{AG}.$$

Si Σ présente un plan de symétrie pour la distribution de masse, G appartient à ce plan.

Le barycentre G de $\Sigma_1 \cup \Sigma_2$ est le barycentre de $((G_1, m_1), (G_2, m_2))$.

Référentiel barycentrique : Le référentiel barycentrique pour cette étude est le référentiel en translation par rapport à $\mathcal{R}$ tel que G y soit immobile. On le note $\mathcal{R}^*$.

Pour $\vec{A}$ grandeur vectorielle quelconque, $\left(\frac{d\vec{A}}{dt} \right)_{/\mathcal{R}^*} = \left(\frac{d\vec{A}}{dt} \right)_{/\mathcal{R}}$ car $\mathcal{R}^*$ est en translation par rapport à $\mathcal{R}$.

Quantité de mouvement :

- Définition : $\vec{P}(\Sigma)_{/\mathcal{R}} = \sum_{i=1}^N m_i \vec{v}_i$ ou $\iiint_V \vec{v}(Q) dm_Q$.

- Propriétés : O fixe. $\vec{P}(\Sigma)_{/\mathcal{R}} = m \vec{v}(G)_{/\mathcal{R}}$.

- Cas du référentiel barycentrique : $\vec{P}^*(\Sigma)_{/\mathcal{R}^*} = m \vec{v}(G)_{/\mathcal{R}^*} = \vec{0}$.

Moment cinétique en un point :

- Définition : A un point quelconque. $\vec{L}_{/A}(\Sigma)_{/\mathcal{R}} = \sum_{i=1}^N \overrightarrow{AM}_i \wedge m_i \vec{v}_i$ ou $\iiint_V \overrightarrow{AQ} \wedge dm_Q \vec{v}(Q)$.
- Torseur cinétique : $\vec{L}_{/B}(\Sigma)_{/\mathcal{R}} = \vec{L}_{/A}(\Sigma)_{/\mathcal{R}} + \vec{P} \wedge \overrightarrow{AB}$.
On a un torseur cinétique de résultante $\vec{P}$ et de moment $\vec{L}_{/A}$.
- Cas du référentiel barycentrique : $\vec{L}_{/B}(\Sigma)^* = \vec{L}_{/A}(\Sigma)^* + \underbrace{\vec{P}^*}_{=\vec{0}} \wedge \overrightarrow{AB}$. Le moment cinétique ne dépend pas du point de calcul. On le note $\vec{L}^*$.

Dans le référentiel barycentrique, le moment cinétique ne dépend pas du point de calcul. On le note $\vec{L}^*$.

Moment cinétique par rapport à un axe orienté : Le moment cinétique de Σ par rapport à Δ est la projection de $\vec{L}_{/A}(\Sigma)_{/\mathcal{R}}$ où A est un point quelconque de Δ .

$$L_{/\Delta}(\Sigma) = \vec{u} \cdot \vec{L}_{/A}(\Sigma)$$

Énergie cinétique : $Ec(\Sigma)_{/\mathcal{R}} = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i v_i^2$ ou $\iiint_V \frac{1}{2} dm_Q \cdot v(Q)^2$.

Théorèmes de König :

- Relatif au moment cinétique :

$$\vec{L}_{/A}(\Sigma)_{/\mathcal{R}} = \vec{L}^* + \overrightarrow{AG} \wedge m \vec{v}(G)_{/\mathcal{R}}$$

- Relatif à l'énergie cinétique :

$$Ec(\Sigma)_{/\mathcal{R}} = Ec(\Sigma)^* + \frac{1}{2} m v(G)_{/\mathcal{R}}^2$$

Cas du solide :

- Cas de la translation : le solide en translation a les mêmes éléments cinétiques que son barycentre affecté de toute la masse.
- Cas de la rotation autour d'un axe fixe :
 - Quantité de mouvement : $\vec{P} = m \vec{v}(G) \neq \vec{0}$ dès que $g \notin \Delta$.
 - Moment cinétique en un point $A \in \Delta$:

$$\vec{L}_{/A}(\Sigma) = \left[\iiint_{\text{Solide}} H Q^2 dm_Q \right] \vec{\omega} - \iiint_{\text{Solide}} (\overrightarrow{AH} - \vec{\omega}) \overrightarrow{HQ} dm_Q$$

S'il existe un plan de symétrie contenant Δ ou si le plan passant par A est perpendiculaire à Δ est un plan de symétrie, alors la composante perpendiculaire à ω est nul.

On dit que Δ est un axe principal d'inertie. On pose $J_\Delta = \iiint_{\text{Solide}} H Q^2 dm_Q = \iiint_{\text{Solide}} r^2 dm$.

C'est le moment d'inertie du solide par rapport à Δ .

$\vec{L}_{/A} = J_\Delta \cdot \vec{\omega}$. $[J_\Delta] = kg \cdot m^2$. J_Δ ne dépend que de la masse du solide.

- Moment cinétique par rapport à l'axe de rotation : $L_{/\Delta} = J_\Delta \cdot \omega$ avec $\omega = \vec{\omega} \cdot \vec{u}$ même si Δ n'est pas axe principal d'inertie.
- Énergie cinétique : $Ec(\Sigma) = \frac{1}{2} J_\Delta \omega^2$ même si Δ n'est pas axe principal d'inertie mais doit être fixe.

- Cas de la rotation autour d'un axe de direction fixe : Dans $\mathcal{R}^*$, le solide a un mouvement de rotation autour de l'axe fixe passant par G et parallèle à la direction de rotation. On revient dans $\mathcal{R}$ par les théorèmes de König.

Théorème d'Huygens : Soit Δ_G une droite parallèle à Δ , alors $J_\Delta = J_{\Delta_G} + ma^2$.

Chapitre 3

Théorèmes généraux de la dynamique des systèmes fermés

3.1 Action mécanique sur un système :

Idée générale : On admet que les effets mécaniques qu'exerce un système Σ' sur un système Σ sont entièrement décrits par un torseur de résultante $\vec{R}$ et par un moment résultant $\vec{M}_{/A}$.

Force unique appliqué en un point : On applique $\vec{F}$ en A . $\vec{M}_{/A}$ n'est pas le moment de $\vec{R}$ en A .

$$\begin{cases} \vec{R} = \vec{F} \\ \vec{M}_{/A} = \vec{AA} \wedge \vec{F} = \vec{0} \end{cases}$$

Ensemble de forces : On applique $\{\vec{F}_i\}$ en $\{M_i\}$.

$$\begin{cases} \vec{R} = \sum \vec{F}_i \\ \vec{M}_{/A} = \sum \vec{AM}_i \wedge \vec{F}_i = \vec{0} \end{cases}$$

Couple : C'est une action particulière dont la résultante est nulle.

$$\begin{cases} \vec{R} = \vec{0} \\ \vec{M}_{/A} = ? \end{cases}$$

Actions intérieures : Il y a des actions entre deux points quelconques M_i et M_j du système Σ étudié.

$$\begin{cases} \vec{R}_{\text{int}} = \vec{0} \\ \vec{M}_{/A \text{ int}} = \vec{0} \end{cases}$$

Principe des actions réciproques : Systèmes Σ_1 et Σ_2 .

$$\Sigma_1 \rightarrow \Sigma_2 : \begin{cases} \vec{R}_{1 \rightarrow 2} \\ \vec{M}_{/A \ 1 \rightarrow 2} \end{cases} \quad \text{et} \quad \Sigma_2 \rightarrow \Sigma_1 : \begin{cases} \vec{R}_{2 \rightarrow 1} \\ \vec{M}_{/A \ 2 \rightarrow 1} \end{cases} .$$
$$\begin{cases} \vec{R}_{1 \rightarrow 2} = -\vec{R}_{2 \rightarrow 1} \\ \vec{M}_{/A \ 1 \rightarrow 2} = -\vec{M}_{/A \ 2 \rightarrow 1} \end{cases}$$

3.2 Théorèmes généraux

Hypothèse et notations : Système Σ étudié dans $\mathcal{R}$ galiléen.

$$\text{Actions extérieures} \begin{cases} \vec{R}_{\text{ext}} \\ \vec{M}_{/A \text{ ext}} \end{cases}$$

Théorème de la quantité de mouvement : $\vec{P}(\Sigma_{/\mathcal{R}}) = \vec{P}$.

$$\left(\frac{d\vec{P}}{dt} \right)_{/\mathcal{R}} = \vec{R}_{\text{ext}}$$

Aussi appelé théorème de la résultante cinétique ou théorème de la résultante dynamique.

Autre forme : $m \vec{a}(G) = \vec{R}_{\text{ext}}$: théorème du centre de masse.

Théorème du moment cinétique en un point fixe A : $\vec{L}_{/A} = \vec{L}_{/A}(\Sigma_{/\mathcal{R}})$.

$$\left(\frac{d\vec{L}_{/A}}{dt} \right)_{/\mathcal{R}} = \vec{M}_{/A \text{ ext}}$$

Théorème du moment cinétique par rapport à un axe orienté : $L_{/\Delta} = \vec{u} \cdot \vec{L}_{/A}$. On peut prendre A fixe $\in \Delta$.

$$\frac{dL_{/\Delta}}{dt} = \mathcal{M}_{/\Delta \text{ ext}} : \text{théorème scalaire du moment cinétique}$$

3.3 Théorèmes du moment cinétique et barycentre

En G dans $\mathcal{R}$:

$$\left(\frac{d\vec{L}_{/G}}{dt} \right)_{/\mathcal{R}} = \vec{M}_{/G \text{ ext}} = \vec{M}_{/A \text{ ext}} + \vec{R}_{\text{ext}} \wedge \vec{AG}$$

Dans $\mathcal{R}^*$:

$$\left(\frac{d\vec{L}^*}{dt} \right)_{/\mathcal{R}^*} = \vec{M}_{/G \text{ ext}} \text{ même si } \mathcal{R}^* \text{ non galiléen.}$$

Théorème du mouvement cinétique scalaire barycentrique : Soit un axe fixe Δ passant par G dans $\mathcal{R}^*$. $\vec{u}$ vecteur unitaire de (Δ) .

$$\frac{dL_{/\Delta}^*}{dt} = \mathcal{M}_{/\Delta \text{ ext}} : \text{TMCS}^*$$

3.4 Actions de contacts entre deux solides

- Liaison rotule :
 - permet toutes les rotations : 3 degrés de libertés.
 - Liaison parfaite si $\vec{M}_{/O} = \vec{0}$.
- Liaison pivot :
 - Un seul degré de liberté : rotation autour d'un axe fixe Δ .
 - Liaison parfaite si $\mathcal{M}_{/\Delta} = 0$.

3.5 Cas des référentiels non galiléens

Si $\mathcal{R}'$ est non galiléen, on rajoute les actions correspondantes aux forces d'inertie d'entraînement et de Coriolis.

$$d\vec{f}_{ie} = -dm_Q \vec{a}_e(Q) \Rightarrow \begin{cases} \vec{R} = \iiint -dm_Q \vec{a}_e(Q) \\ \vec{\mathcal{M}}_{/A} = \iiint_V \vec{AQ} \wedge (-dm_Q \vec{a}_e(Q)) \end{cases} .$$

Si $\mathcal{R}'$ est en translation par rapport à $\mathcal{R}$, la force de Coriolis n'intervient pas et $\vec{a}_e(Q) = \vec{a}_e = \vec{a}(O')_{/\mathcal{R}}$. $d\vec{f}_{ie} = -dm_Q \vec{a}(O')_{/\mathcal{R}}$.

Chapitre 4

Lois de Coulomb du frottement de glissement

4.1 Lois phénoménologiques :

Soit deux solides S_1 et S_2 en contact ponctuel en un point I . Actions de contacts :
$$\begin{cases} \vec{R} = \vec{N} + \vec{T} \\ \vec{M}_{/I} = \vec{0} \end{cases} .$$

Cas du non glissement : Lorsque S_2 ne glisse pas sur S_1 , alors
$$\begin{cases} \vec{v}_g(S_2/S_1) = \vec{0} \\ \|\vec{T}\| \leq \mu_s \|\vec{N}\| \end{cases} .$$

μ_s est le coefficient de frottement statique entre les deux solides. Il est sans dimension. Il ne dépend que de la nature des deux solides en contact.

Remarque : on ne sait rien a priori sur le sens de $\vec{T}$.

Cas du glissement : Lorsque S_2 glisse sur S_1 , alors
$$\begin{cases} \vec{v}_g(S_2/S_1) \neq \vec{0} \\ \|\vec{T}\| = \mu_d \|\vec{N}\| \end{cases} \text{ et } \vec{T} \text{ est anticollinéaire à la vitesse de glissement de } S_2 \text{ sur } S_1 .$$

μ_d est le coefficient de frottement dynamique entre les deux solides. Il est sans dimension. Il ne dépend que de la nature des deux solides en contact.

Quelques valeurs : En général, $\mu_d < \mu_s$ mais les valeurs sont proches. Souvent, on prend $\mu = \mu_s = \mu_d$.

On parle du coefficient de frottement :

- bois / bois : $\mu \approx 0.3$ à 0.5 ;
- acier / acier (sec) : $\mu \approx 0.15$;
- pneu / route sèche (respectivement mouillée) : $\mu \approx 0.7$ (respectivement 0.1);
- métal / glace : $\mu \approx 0.02$.

Cône de frottement : On se place dans le cas où $\mu = \mu_s = \mu_d$.
$$\begin{cases} \|\vec{T}\| \leq \mu \|\vec{N}\| \text{ non glissement} \\ \|\vec{T}\| = \mu \|\vec{N}\| \text{ glissement} \end{cases} .$$

$$\tan \alpha = \frac{\|\vec{T}\|}{\|\vec{N}\|} = \mu .$$

Dans le cas du glissement, la réaction $\vec{R}$ est sur le cône d'axe $(I, \vec{N})$ et de demi angle au

sommet α tel que $\tan \alpha = \mu$. C'est le cône de frottement.

Dans le cas de non glissement, la réaction $\vec{R}$ est à l'intérieur du cône de frottement.

Méthodologie : résolution d'un problème avec frottement solide : On fait une hypothèse de non glissement : on fait les calculs.

On valide puis on détermine les conditions pour lesquelles l'hypothèse initiale est satisfaite.

Chapitre 5

Aspect énergétique de la dynamique des systèmes

5.1 Puissance et travail :

Notations : Soit Σ un système fermé quelconque avec une distribution continue des efforts / matières.

Sur $d\tau_Q$ centré en Q de vitesse $\vec{v}(Q)$ s'exerce $d\vec{f}_Q$ et $\iiint_V d\vec{f}_Q = \vec{R}$.

Remarque : toujours bien préciser le point d'application de chacun des $d\vec{f}_Q$.

Définition : $\mathcal{P}(t) = \iiint_V d\vec{f}_Q \cdot \vec{v}(Q)$: puissance totale de l'action sur le système.

Le travail élémentaire en t et $t + dt$: $\delta\mathcal{T} = \mathcal{P}(t)dt$.

Le travail fini entre t_1 et t_2 : $\mathcal{T} = \int_{t_1}^{t_2} \delta\mathcal{T} = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{P}(t)dt$.

Cas des actions intérieures : Actions intérieures : $\{\vec{0}, \vec{0}\}_{/A}$. Cependant, la puissance des actions intérieures est a priori non nulle. $\mathcal{P}_{\text{int}} \neq 0$ en général.

On admet :

- $\mathcal{P}_{\text{int}}$ ne dépend pas du référentiel de calcul ;
- $\mathcal{P}_{\text{int}} \neq 0$ dès que la distance entre 2 points du système qui interagissent varie au cours du temps.

Cas du solide : $\Sigma = S$ un solide.

$$\mathcal{P} = \vec{R} \cdot \vec{v}(A) + \vec{\omega} \cdot \vec{\mathcal{M}}_{/A}$$

Cas particulier :

- si l'action est un glisseur dont I est le point d'application ($\vec{\mathcal{M}}_{/I} = \vec{0}$). $\mathcal{P} = \vec{R} \cdot \vec{V}(I)$;
- si l'action est un couple : $\begin{cases} \vec{R} = \vec{0} \\ \vec{\mathcal{M}}_{/A} = \vec{\Gamma} \end{cases}$, $\mathcal{P} = \vec{\omega} \cdot \vec{\Gamma}$;
- actions intérieures à un solide : $\begin{cases} \vec{R}_{\text{int}} = \vec{0} \\ \vec{\mathcal{M}}_{/A,\text{int}} = \vec{0} \end{cases}$, $\mathcal{P}_{\text{int}}(\text{solide}) = 0$.

5.2 Théorème de la puissance et de l'énergie cinétique :

Soit Σ un système quelconque et $\mathcal{R}$ galiléen.

Théorème de la puissance cinétique :

$$\frac{dEc}{dt} = \mathcal{P}_{\text{ext}} + \mathcal{P}_{\text{int}}$$

Théorème de l'énergie cinétique : Obtenu par intégration entre deux instants t_1 et t_2 :

$$\Delta Ec = Ec(t_2) - Ec(t_1) = \mathcal{T}_{\text{ext}} + \mathcal{T}_{\text{int}}$$

Cas d'un seul solide :

$$\mathcal{P}_{\text{int}} = 0 \quad \frac{dEc}{dt} = \mathcal{P}_{\text{ext}} \quad \Delta Ec = \mathcal{T}_{\text{ext}}$$

5.3 Cas des actions de contact entre deux solides :

Deux solides S_1 et S_2 , en contact ponctuel en I .

$$\text{Action de } S_1 \rightarrow S_2 : \begin{cases} \vec{R} \\ \vec{M}_{/I} = \vec{0} \end{cases} \quad \text{et action de } S_2 \rightarrow S_1 : \begin{cases} -\vec{R} \\ \vec{M}_{/I} = \vec{0} \end{cases} .$$

$$\mathcal{P} = \vec{T} \cdot \vec{v}_g(S_2/S_1)$$

Puissance nulle si non glissement, négative si glissement.

5.4 Solide en rotation autour d'un axe fixe Δ :

Soit une action $\left\{ \vec{R}, \vec{M}_{/A} \right\}_{/A}$ s'exerçant sur le solide en rotation autour de l'axe fixe Δ . Soit A appartenant au solide et à Δ .

$$\mathcal{P}_{\text{action}} = \omega \cdot \mathcal{M}_{/\Delta} \quad \text{avec} \quad \vec{\omega} = \omega \cdot \vec{u} = \dot{\theta} \cdot \vec{u}$$

$$\text{D'où } \delta\mathcal{T} = \mathcal{P}dt = \mathcal{M}_{/\Delta}d\theta \quad \text{et le travail fini } \mathcal{T} = \int_{t_1 \text{ ou } \theta_1}^{t_2 \text{ ou } \theta_2} \mathcal{M}_{/\Delta}d\theta.$$

Cas particulier des liaisons parfaites :

- pour les liaisons pivots parfaites : $\mathcal{P}_{\text{action}} = 0$;
- pour les liaisons rotules parfaites : $\mathcal{P}_{\text{action}} = 0$.

5.5 Énergie potentielle :

Définition : Soit Σ un système quelconque à n degrés de liberté cinématiques. La configuration du système est repérée par $(q_1(t), \dots, q_n(t))$. Soit une évolution quelconque du système entre les deux instants t_1 et t_2 : $(q_1(t_1), \dots, q_n(t_1)) \rightarrow (q_1(t_2), \dots, q_n(t_2))$ (schéma dans l'espace de configuration du système).

Soit une action agissant sur le système et $\mathcal{T}_{1 \rightarrow 2}$ le travail de cette action entre t_1 et t_2 le long de ce chemin. Cette action dérive d'une énergie potentielle ou est conservative si $\mathcal{T}_{1 \rightarrow 2}$ ne dépend pas du chemin suivi entre l'état initial et l'état final dans l'espace de configuration.

On montre alors qu'il existe une fonction Ep , appelée énergie potentielle, fonction uniquement des paramètres $(q_1(t), \dots, q_n(t))$ telle que :

$$\mathcal{T}_{1 \rightarrow 2} = -\Delta Ep = Ep((q_1(t_1), \dots, q_n(t_1))) - Ep((q_1(t_2), \dots, q_n(t_2))) \quad \text{ou} \quad \delta\mathcal{T} = -dEp$$

5.6 Théorèmes de l'énergie / puissance mécanique :

Notations : On note $Ep = Ep_{\text{int}} + Ep_{\text{ext}}$ l'énergie potentielle totale et $Em = Ec + Ep$ l'énergie mécanique.

Théorème de la puissance mécanique :

$$\mathcal{P}_m = \frac{dEm}{dt} = \mathcal{P}_{\text{ext, non conservative}} + \mathcal{P}_{\text{int, non conservative}}$$

Théorème de l'énergie mécanique :

$$\Delta Em = \mathcal{T}_{\text{ext, non conservative}} + \mathcal{T}_{\text{int, non conservative}}$$

Cas particulier d'un seul solide :

$$\mathcal{P}_m = \frac{dEm}{dt} = \mathcal{P}_{\text{ext, non conservative}} \quad \Delta Em = \mathcal{T}_{\text{ext, non conservative}}$$

5.7 Système conservatif :

Définition : Σ est un système conservatif si son énergie mécanique est constante au cours du temps. C'est le cas si on ne peut pas trouver d'action intérieure ou extérieure non conservative qui travaille.

Si un système est isolé, il ne subit pas d'actions extérieures. Cependant, il n'est pas forcément conservatif (à cause d'éventuelles actions intérieures non conservatives).

Intéret : $Em = \underbrace{Ec}_{\text{lien avec les vitesses}} + \underbrace{Ep}_{\text{lien avec la configuration de } \Sigma} = \text{constante.}$

Pour les système à 1 degré de liberté conservatif, l'équation $Em = \text{constante}$ est une intégrale première du mouvement (car équation différentiel avec les paramètres et les dérivées premières seulement).

On retrouve l'équation du second ordre en écrivant $\frac{dEm}{dt} = 0$

5.8 Cas des référentiels non galiléens :

On rajoute dans les bilans de puissances et de travaux ceux des forces d'inertie.

Or l'action de la force de Coriolis ne travaille pas. Il ne reste que les forces d'inertie d'entraînement.

Dans deux cas particuliers, cette action est même conservative :

1. $\mathcal{R}'$ est en rotation rectiligne uniformément accélérée par rapport à $\mathcal{R}$ galiléen ;
2. $\mathcal{R}'$ est en rotation uniforme par rapport à $\mathcal{R}$ galiléen.