OEM Chapitre 1 : Introduction aux ondes électromagnétiques

31/1/2012

1 Ondes

1.1 Définition

Une onde est la propagation d'un ébranlement sans transfert de matière, sans déformation et à vitesse constante (célérité) dans un milieu non dispersif. Une onde transporte de l'énergie.

Équation d'onde Dans un milieu non dispersif, la grandeur $s(M,t)$ satisfait l'équation de D'Alembert.

$$\Delta s - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 s}{\partial t^2} = 0$$

c est la célérité de l'onde.
Remarque 1 : $\Box = \left(\Delta - \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2}{\partial t^2}\right)$ est appelé opérateur Dalembertien.
Remarque 2 : s peut être scalaire comme vectoriel.

1.2 Solution générale

La forme générale est connue : (pour une dimension)

$$s(x,t) = f\left(t - \frac{x}{c}\right) + g\left(t + \frac{x}{c}\right)$$

où f et g sont deux fonctions d'une seule variable deux fois dérivables.

2 Cas des ondes électromagnétiques

Équation de propagation des champs

$$\Delta \overrightarrow{E} - \varepsilon_0 \cdot \mu_0 \cdot \frac{\partial^2 \overrightarrow{E}}{\partial t^2} \text{ et en fait } \varepsilon_0 \cdot \mu_0 = \frac{1}{c^2}$$

$$\Delta \overrightarrow{B} - \frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial^2 \overrightarrow{B}}{\partial t^2}$$

2.1 Propagation des potentiels

On se place dans la jauge de Lorentz.

$$\Delta \overrightarrow{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \overrightarrow{A}}{\partial t^2} = 0$$

$$\Delta V - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = 0$$

3 Des solutions particulières : les ondes planes progressives monochromatiques

3.1 Définition

Une onde est une onde plane progressive de direction $\overrightarrow{u}$ (ou alors de vecteur d'onde $\overrightarrow{k} = k\overrightarrow{u}$) si $\forall t$ fixé, les champs $\overrightarrow{E}$ et $\overrightarrow{B}$ sont uniformes dans tout plan orthogonal à $\overrightarrow{u}$.
Une onde plane progressive est de plus monochromatique de pulsation ω si la dépendance temporelle est sinusoïdale de pulsation ω.

$$\overrightarrow{E} = \left| \begin{array}{l} E_{0_x} \cos\left(\omega \cdot \left(t - \dfrac{\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{r}}{c}\right) + \varphi_{0_x}\right) \\ E_{0_y} \cos\left(\omega \cdot \left(t - \dfrac{\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{r}}{c}\right) + \varphi_{0_y}\right) \\ E_{0_z} \cos\left(\omega \cdot \left(t - \dfrac{\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{r}}{c}\right) + \varphi_{0_z}\right) \end{array} \right. \quad \text{avec } \overrightarrow{r} = \overrightarrow{OM}$$

où $k = \dfrac{\omega}{c}$ dans le vide. Ainsi,

$$\overrightarrow{E} = \left| \begin{array}{l} E_{0_x} \cos\left(\omega \cdot t - \overrightarrow{k} \cdot \overrightarrow{r} + \varphi_{0_x}\right) \\ E_{0_y} \cos\left(\omega \cdot t - \overrightarrow{k} \cdot \overrightarrow{r} + \varphi_{0_y}\right) \\ E_{0_z} \cos\left(\omega \cdot t - \overrightarrow{k} \cdot \overrightarrow{r} + \varphi_{0_z}\right) \end{array} \right.$$

3.2 Utilisation des complexes

$$\underline{\overrightarrow{E}} = \underline{\overrightarrow{E_0}} \cdot e^{j\left(\omega \cdot t - \overrightarrow{k} \cdot \overrightarrow{r}\right)} \text{ avec } \underline{\overrightarrow{E_0}} = \left| \begin{array}{l} \underline{E_{0_x}} \\ \underline{E_{0_y}} \\ \underline{E_{0_z}} \end{array} \right. = \left| \begin{array}{l} E_{0_x} \cdot e^{j \cdot \varphi_{0x}} \\ E_{0_y} \cdot e^{j \cdot \varphi_{0y}} \\ E_{0_z} \cdot e^{j \cdot \varphi_{0z}} \end{array} \right.$$

Valable uniquement pour une onde plane progressive monochromatique :

Domaine temporel	Domaine complexe	Domaine temporel	Domaine complexe
$\dfrac{\partial .}{\partial t}$	$\times j \cdot \omega$	$\dfrac{\partial .}{\partial z}$	$\times(-j \cdot k_z)$
$\dfrac{\partial .}{\partial x}$	$\times(-j \cdot k_x)$	$div\, \underline{\overrightarrow{A}}$	$-j \cdot \overrightarrow{k} \cdot \underline{\overrightarrow{A}}$
$\dfrac{\partial .}{\partial y}$	$\times(-j \cdot k_y)$	$\overrightarrow{rot}\, \underline{\overrightarrow{A}}$	$-j \cdot \overrightarrow{k} \wedge \underline{\overrightarrow{A}}$
		$\Delta \underline{\overrightarrow{A}}$	$-k^2 \cdot \underline{\overrightarrow{A}}$

3.3 Équation de Maxwell en notation complexe

$$-j \cdot \overrightarrow{k} \cdot \underline{\overrightarrow{E}} = 0$$
$$-j \cdot \overrightarrow{k} \cdot \underline{\overrightarrow{B}} = 0$$
$$\overrightarrow{k} \wedge \underline{\overrightarrow{E}} = \omega \cdot \underline{\overrightarrow{B}}$$
$$\overrightarrow{k} \wedge \underline{\overrightarrow{B}} = -\frac{\omega}{c^2} \cdot \underline{\overrightarrow{E}}$$

3.4 Relation de dispersion

Relation de dispersion d'une onde électromagnétique monochromatique dans le vide :

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2}$$

3.5 Structure de l'onde plane progressive monochromatique

$$\underline{\overrightarrow{B}} = \frac{\overrightarrow{k} \wedge \underline{\overrightarrow{E}}}{\omega} = \frac{\overrightarrow{u} \wedge \underline{\overrightarrow{E}}}{c} \text{ pour une OPPM}$$

$$\underline{\overrightarrow{E}} = c \cdot \underline{\overrightarrow{B}} \wedge \overrightarrow{u}$$

$$\|\overrightarrow{B}\| = \frac{\|\overrightarrow{E}\|}{c}$$

3.6 Vitesse de phase d'une onde plane progressive monochromatique

Définitio : Soit une onde plane progressive monochromatique. La vitesse de phase v_φ de cette onde est la vitesse à laquelle un observateur doit se déplacer pour voir une phase de l'onde constante.

$$v_\varphi = \frac{\omega}{k} \text{ pour une OPPM}$$

Si de plus cette onde plane progressive monochromatique se déplace dans le vide,

$$v_\varphi = \frac{\omega}{k} = c = \text{constante}$$

On dit que le vide n'est pas dispersif.

4 Aspect énergétique

4.1 Densité d'énergie

Équipartition entre u_{el} et u_{ma} :

$$u_{\text{em}} = \varepsilon_0 E^2$$

4.2 Vecteur de Poynting

$$\overrightarrow{\pi} = \varepsilon_0 \cdot c \cdot E^2 \cdot \overrightarrow{u}$$

4.3 Vitesse de propagation de l'énergie

On note v_e la vitesse de propagation de l'énergie.
$d\mathcal{E}$ contenu dans le cylindre de base S et de hauteur $v_e \cdot dt$ de volume $S \cdot v_e \cdot dt$,

$$d\mathcal{E} = S \cdot v_e \cdot dt \cdot \varepsilon_0 \cdot E^2$$

Ici, $v_e = c$.

4.4 Intensité ou éclairement (optique)

L'éclairement désgine la puissance surfacique moyenne.
Pour une onde électromagnétique, c'est :

$$\|\langle\overrightarrow{\pi}\rangle\|$$

Pour une onde plane progressive monochromatique,

$$\|\langle\overrightarrow{\pi}\rangle\| = \frac{1}{2} \cdot \varepsilon_0 \cdot c \cdot E_{\mathrm{m}}^2 = I = \mathcal{E}$$