Fiche ondes électromagnétique

---

1 Ondes

Définition : Une onde est la propagation d'un ébranlement sans transfert de matière, sans déformation et à vitesse constante (célérité) dans un milieu non dispersif. Une onde transporte de l'énergie.

Équation d'onde : Dans un milieu non dispersif, la grandeur $s(M,t)$ satisfait l'équation de D'Alembert.

$$\Delta s - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 s}{\partial t^2} = 0$$

c est la célérité de l'onde.
Remarque 1 : $\Box = \left(\Delta - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)$ est appelé opérateur Dalembertien.
Remarque 2 : s peut être scalaire comme vectoriel.

Solution générale : La forme générale est connue (pour une dimension) :

$$s(x,t) = f\left(t - \frac{x}{c}\right) + g\left(t + \frac{x}{c}\right)$$

où f et g sont deux fonctions d'une seule variable deux fois dérivables.

Propagation des champs et des potentiels : $\overrightarrow{E}$, $\overrightarrow{B}$, $\overrightarrow{A}$ et V se propagent dans le vide à la vitesse de la lumière dans le vide.

Définition : Une onde est une onde plane progressive de direction $\overrightarrow{u}$ (ou alors de vecteur d'onde $\overrightarrow{k} = k\overrightarrow{u}$) si $\forall t$ fixé, les champs $\overrightarrow{E}$ et $\overrightarrow{B}$ sont uniformes dans tout plan orthogonal à $\overrightarrow{u}$. Une onde plane progressive est de plus monochromatique de pulsation ω si la dépendance temporelle est sinusoïdale de pulsation ω.

$$\overrightarrow{E} = \left| \begin{array}{l} E_{0_x}\cos\left(\omega\cdot\left(t - \dfrac{\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{r}}{c}\right) + \varphi_{0_x}\right) \\ E_{0_y}\cos\left(\omega\cdot\left(t - \dfrac{\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{r}}{c}\right) + \varphi_{0_y}\right) \\ E_{0_z}\cos\left(\omega\cdot\left(t - \dfrac{\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{r}}{c}\right) + \varphi_{0_z}\right) \end{array} \right. \quad \text{avec } \overrightarrow{r} = \overrightarrow{OM}$$

or $k = \dfrac{\omega}{c}$ dans le vide. Ainsi,

$$\overrightarrow{E} = \left| \begin{array}{l} E_{0_x}\cos\left(\omega\cdot t - \overrightarrow{k}\cdot\overrightarrow{r} + \varphi_{0_x}\right) \\ E_{0_y}\cos\left(\omega\cdot t - \overrightarrow{k}\cdot\overrightarrow{r} + \varphi_{0_y}\right) \\ E_{0_z}\cos\left(\omega\cdot t - \overrightarrow{k}\cdot\overrightarrow{r} + \varphi_{0_z}\right) \end{array} \right.$$

Équation de Maxwell en notation complexe :

$$-j \cdot \overrightarrow{k} \cdot \underline{\overrightarrow{E}} = 0$$

$$-j \cdot \overrightarrow{k} \cdot \underline{\overrightarrow{B}} = 0$$

$$\overrightarrow{k} \wedge \underline{\overrightarrow{E}} = \omega \cdot \underline{\overrightarrow{B}}$$

$$\overrightarrow{k} \wedge \underline{\overrightarrow{B}} = -\frac{\omega}{c^2} \cdot \underline{\overrightarrow{E}}$$

Relation de dispersion : Relation de dispersion d'une onde électromagnétique monochromatique dans le vide :

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2}$$

Structure de l'onde plane progressive monochromatique

$$\underline{\overrightarrow{B}} = \frac{\overrightarrow{k} \wedge \underline{\overrightarrow{E}}}{\omega} = \frac{\overrightarrow{u} \wedge \underline{\overrightarrow{E}}}{c} \text{ pour une OPPM}$$

$$\underline{\overrightarrow{E}} = c \cdot \underline{\overrightarrow{B}} \wedge \overrightarrow{u}$$

$$\|\overrightarrow{B}\| = \frac{\|\overrightarrow{E}\|}{c}$$

Définition : vitesse de phase d'une onde plane progressive monochromatique : Soit une onde plane progressive monochromatique. La vitesse de phase v_φ de cette onde est la vitesse à laquelle un observateur doit se déplacer pour voir une phase de l'onde constante.

$$v_\varphi = \frac{\omega}{k} \text{ pour une OPPM}$$

Si de plus cette onde plane progressive monochromatique se déplace dans le vide,

$$v_\varphi = \frac{\omega}{k} = c = \text{constante}$$

Densité d'énergie : Équipartition entre u_{el} et u_{ma} :

$$u_{\text{em}} = \varepsilon_0 E^2$$

Vecteur de Poynting :

$$\overrightarrow{\pi} = \varepsilon_0 \cdot c \cdot E^2 \cdot \overrightarrow{u}$$

Vitesse de propagation de l'énergie : On note v_e la vitesse de propagation de l'énergie. $d\mathcal{E}$ contenu dans le cylindre de base S et de hauteur $v_e \cdot dt$ de volume $S \cdot v_e \cdot dt$,

$$d\mathcal{E} = S \cdot v_e \cdot dt \cdot \varepsilon_0 \cdot E^2$$

Ici, $v_e = c$.

Intensité ou éclairement (optique) : L'éclairement désgine la puissance surfacique moyenne. Pour une onde électromagnétique, c'est :

$$\|\langle\overrightarrow{\pi}\rangle\|$$

Pour une onde plane progressive monochromatique,

$$\|\langle\overrightarrow{\pi}\rangle\| = \frac{1}{2} \cdot \varepsilon_0 \cdot c \cdot E_{\mathrm{m}}^2 = I = \mathcal{E}$$

2 Polarisation

Définition : Idée : pour une onde plane progressive monochromatique, si $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{E}$ sont connus, tout est connu.
À une onde plane progressive monochromatique, on va associer un type de polarisation suivant la nature du mouvement de $\overrightarrow{E}$ dans un plan orthogonal à $\overrightarrow{u}$ vu par un observateur qui voit l'onde arriver sur lui.

Définition : polariseur : un polariseur est un dispositif possédant une direction privilégiée dite direction de transmission : il ne laisse passer que la composante du champ électrique de l'onde parallèle à cette direction et élimine la composante orthogonale.
En sortie, la lumière est polarisée parallèlement à la direction de transmission.
On se sert de polariseur pour analyser la lumière.

Loi de Malus : Soit une onde incidente polarisée rectilignement qui arrive sur un polariseur. Soit θ l'angle entre la direction de transmission et la direction de polarisation. Soit I_0 l'intensité de l'onde incidente et I l'intensité de l'onde en sortie du polariseur.

$$I = I_0 \cdot \cos^2\theta$$

3 Réflexion d'une onde electromagnétique sur un conducteur parfait sous incidence normale

Définition : Un conducteur parfait a une conductivité électrique infinie : $\gamma = +\infty$.

Conséquences pour le conducteur :

- $\overrightarrow{E} = \overrightarrow{0}$;
- $\overrightarrow{B} = \overrightarrow{0}$;
- $\overrightarrow{j} = \overrightarrow{0}$: les courants ne sont que surfaciques ;
- relation de passage : $\overrightarrow{E}(P) = \dfrac{\sigma(P)}{\varepsilon_0}\overrightarrow{n}$ avec P infiniment proche de la surface et dans le vide ;
- $\overrightarrow{B}(P) = \mu_0 \cdot \overrightarrow{j_S}(P) \wedge \overrightarrow{n}$.

Structure de l'onde réfléchie : Grandeur sinosoïdale de même pulsation que l'onde incidente. Invariance dselon toute translation parallèlement au plan du conducteur.
Onde incidente plane progressive de pulsation ω, polarisée rectilignement suivant $\overrightarrow{u_n}$ (sans perte de généralité) :

$$\underline{\overrightarrow{E_i}} = E_0 \cdot e^{j(\omega \cdot t - k \cdot z)}\overrightarrow{u_x}$$

$$\underline{B_i} = \frac{\overrightarrow{u_z} \wedge \underline{\overrightarrow{E_i}}}{c} = \frac{E_0}{c} e^{j(\omega \cdot - k \cdot z)} \overrightarrow{u_y}$$

$$\underline{\overrightarrow{E_r}} = -E_0 \cdot e^{j(\omega \cdot t + k \cdot z)} \overrightarrow{u_x}$$

$$\underline{B_r} = \frac{E_0}{c} e^{j(\omega \cdot + k \cdot z)} \overrightarrow{u_y}$$

Coefficient de reflexion en amplitude :

$$\underline{r} = \frac{\underline{E_r}(z = 0^-, t)}{\underline{E_i}(z = 0^-, t)} = -1$$

Aspect énergétique :

$$\langle \overrightarrow{\pi_i} \rangle_t = \frac{1}{2} \varepsilon_0 \cdot c \cdot {E_0}^2 \overrightarrow{u_z}$$

$$\langle \overrightarrow{\pi_r} \rangle_t = -\frac{1}{2} \varepsilon_0 \cdot c \cdot {E_0}^2 \overrightarrow{u_z}$$

Surface du conducteur : En P infiniment voisin de la surface dans le vide,

$$\sigma(P) = 0$$

$$\overrightarrow{j_S}(P) = \frac{2 \cdot E_0}{\mu_0 \cdot c} \cos(\omega \cdot t) \overrightarrow{u_x}$$

Structure de l'onde résultante :

$$\overrightarrow{E_r}(z, t) = 2 \cdot E_0 \cdot \sin(kz) \sin(\omega \cdot t) \overrightarrow{u_x} \text{ (pas progressif)}$$

$$\overrightarrow{B_r}(z, t) = \frac{2 \cdot E_0}{c} \cdot \cos(kz) \cos(\omega \cdot t) \overrightarrow{u_y} \text{ (pas progressif)}$$

Ce sont des ondes stationnaires. L'amplitude des vibrations dépend du point d'observation.

- Si z est tel que $\sin(kz) = 0$, alors $\overrightarrow{E_r} = \overrightarrow{0}$: noeud de vibration du champ électrique ;
- Si z est tel que $|\sin(kz)| = 0$, alors l'amplitude est maximum et vaut $2 \cdot E_0$: ventre de vibration du champ électrique ;

Les noeuds de $\overrightarrow{E}$ sont les ventres de $\overrightarrow{B}$ et réciproquement.
À z fixé, $\overrightarrow{E}$ et $\overrightarrow{B}$ de l'onde stationnaire sont en quadratures. Ils étaient en phase pour les ondes planes progressives.

On n'a plus la relation $\overrightarrow{B} = \frac{\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{E}}{c}$ car on n'a plus une onde plane progressive.
La période spatiale de l'onde stationnaire λ est celle de l'onde incidente et de l'onde réfléchie.
Distance entre deux ventres successifs est $\frac{\lambda}{2}$.
Distance entre un noeud et un ventre (et inversement) successifs est $\frac{\lambda}{4}$.

Aspect énergétique :

$$\langle \overrightarrow{\pi} \rangle_t = \overrightarrow{0}$$

En moyenne, l'onde résultante stationnaire ne transporte pas de puissance. Physiquement, c'est cohérent avec le fait que la surface du conducteur réfléchisse la totalité de la puissance incidente.

4 Rayonnement dipolaire

Approximation dipolaire : observation à grande distance vis-à-vis de la taille du dipôle :

$$r \gg a$$

Approximation non relatibiste : la vitesse de la charge est plus petite que la vitesse de la lumière (vitesse de $q \ll c$) :

$$a \ll \lambda$$

Approximation de la zone de rayonnement : on se place dans la zone de rayonnement. On observe l'onde dans la zone telle que $r \gg \lambda$:

$$r \gg \lambda$$